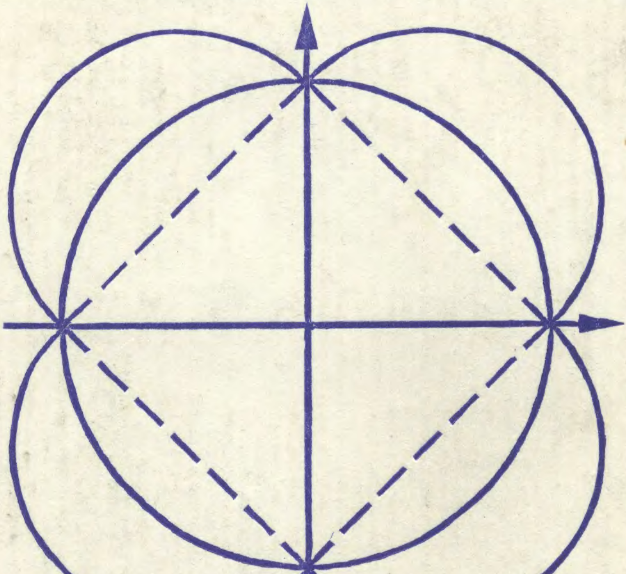
В. М. ГОВОРОВ
П. Т. ДЫБОВ
Н. В. МИРОШИН
С. Ф. СМИРНОВА



СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. М. ГОВОРОВ, П. Т. ДЫБОВ
Н. В. МИРОШИН, С. Ф. СМИРНОВА

СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

с методическими указаниями и решениями

Под редакцией А. И. ПРИЛЕПКО

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для слушателей
подготовительных отделений вузов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.1
Г 57
УДК 51

Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями). — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 384 с.

Основу сборника составляют задачи, предлагавшиеся на письменных и устных вступительных экзаменах по математике более чем в ста вузах разных профилей. Все задачи снабжены ответами, а ряд задач — указаниями и решениями.

Сборник может быть использован для самостоятельной подготовки к конкурсным экзаменам в вузы различной ориентации, на подготовительных отделениях и курсах. Учителя средних школ найдут в книге материал, который смогут использовать в своей работе.

Г $\frac{1702030000-132}{053(02)-83}$ 88-83

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит более трех тысяч самых разнообразных задач по всем разделам школьного курса математики. Он составлен в соответствии с ныне действующей программой, все используемые обозначения и терминология соответствуют обозначениям и терминологии, принятым в средней школе.

Основной фонд задач сборника составили задачи, поступившие на отделение математики телевизионных подготовительных курсов Центрального телевидения (отделения математики и физики работали на базе Московского инженерно-физического института). Почти все задачи, включенные в сборник, предлагались на вступительных экзаменах по математике в различных вузах. В сборнике приведены задачи 120 вузов различных городов и республик нашей страны. Авторы стремились представить вузы самых различных профилей наиболее характерными для них задачами, предлагавшимися на вступительных экзаменах. Материал сборника разбит на четыре раздела: алгебра и тригонометрия, начала анализа, геометрия и векторная алгебра, задачи и вопросы устного экзамена.

Материал сборника охватывает оба варианта ныне действующей программы. Кроме того, авторы сочли необходимым включить в сборник материал, относящийся к комплексным числам, элементам комбинаторики, формуле бинома Ньютона, простейшим тригонометрическим неравенствам. При подготовке к вступительным экзаменам в вузы изучение этого материала не обязательно, так как он не входит в программу вступительных экзаменов. Однако этот материал, не входящий в школьную программу и в программу для поступающих в вузы, начинает использоваться при изучении вузовского курса буквально с первых дней и часто без необходимых объяснений. Включение этого материала в сборник поможет читателям расширить свои знания, будет полезно для физико-математических школ, дневных подготовительных отделений, для работы школьных математических кружков.

Все задачи снабжены ответами, а многие и методическими указаниями к решению. Типичные задачи и многие задачи повышенной трудности снабжены краткими решениями. Задачи повышенной трудности и задачи олимпиадного характера помечены звездочками. В некоторые параграфы включен справочный материал. В разделе «Вопросы и задачи устного экзамена» печатается программа по математике для поступающих в вузы.

Авторы надеются, что собранный воедино большой материал вступительных экзаменов в вузы самой различной ориентации будет полезен как учащимся, готовящимся к поступлению в высшие учебные заведения, так и учителям средних учебных заведений, а также всем лицам, желающим углубить свои знания по математике.

Авторы

Раздел I

АЛГЕБРА, ТРИГОНОМЕТРИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ЗАДАЧИ С ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

1. (МПИ, 1979 г.). Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

2. (МИНХ, 1977 г.). Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.

3. (МТИЛП, 1977 г.). Найдите три числа, из которых второе больше первого на столько, на сколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух больших чисел равно 115.

4. (МХТИ, 1977 г.). Сумма двух чисел равна 15, а их среднее арифметическое на 25% больше среднего геометрического. Найдите эти числа.

5. (МИНХ, 1979 г.). Разность двух чисел равна 48, разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел 18. Найдите эти числа.

6. (МИНГП, 1977 г.). Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найдите эти числа.

7. (ВЗИИЖТ, 1979 г.; МТИЛП, 1980 г.). Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на два больше числа его десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

8. (МЭСИ, 1980 г.). Произведение цифр двузначного числа в два раза больше суммы его цифр. Если из искомого числа вычесть 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

9. (МИХМ, 1979 г.). Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

10. (МИНХ, 1979 г.). Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найдите это число.

11. (МИНХ, 1979 г.). Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы цифр равен утроенному искомому числу. Найдите это число.

12. (МИХМ, 1977 г.). Найдите двузначное число, которое на 12 больше суммы квадратов его цифр и на 16 больше удвоенного произведения его цифр.

13. (МИХМ, 1977 г.). Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 10, а произведение искомого числа на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 403. Найдите это число.

14. (МГПИ, 1978 г.; МИНХ, 1979 г.). Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это двузначное число.

15. (МИНХ, МЭСИ, 1977 г.). Если двузначное число разделить на число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 15; если же из данного числа вычесть 9, то получится сумма квадратов цифр этого числа. Найдите это число.

16. (МЭСИ, 1977 г.). Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно 8/3, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

17. (МИНХ, 1977 г.). Найдите двузначное число по следующим условиям: частное от деления искомого числа на сумму его цифр равно 8; частное от деления на эту же сумму произведения цифр равно 14/9.

18. (МИНХ, 1979 г.). Если неизвестное двузначное число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном будет 8, а в остатке 7. Найдите это число.

19. (МИНХ, 1979 г.). Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найдите это число.

20. (МИНХ, 1979 г.). Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

21. (ЯГУ, 1980 г.). Найдите два последовательных натуральных числа, если квадрат суммы этих чисел на 112 больше суммы их квадратов.

22. (МАИ, 1979 г.). В первый раз знаменатель положительной дроби увеличим на 3, а во второй раз — уменьшим на 5. Сумма полученных таким образом дробей оказалась равной 2/3. Найдите знаменатель дроби, если ее числитель равен 2.

23. (МАИ, 1977 г.). Знаменатель несократимой дроби на 2 больше чем числитель. Если у дроби, обратной данной, умень-

шить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найдите дробь.

24. (МИФИ, 1976 г.). Рассматривается дробь, знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем 1/3, если же из числителя и знаменателя вычесть по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше 1/10. Найдите дробь.

25. (ЛатвГУ, 1980 г.). Существует лишь три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

26. (ГГУ, 1978 г.). Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

27. (МИФИ, 1979 г.). Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 4.

28. (ТартГУ, 1980 г.). Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

29. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1978 г.). Найдите сумму всех нечетных трехзначных чисел, которые делятся на 5.

30. (МИФИ, 1976 г.). Произведение двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

31. (МИФИ, 1976 г.). Найдите пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 45.

32. (МИФИ, 1975 г.). Существует такое натуральное число, которое равно квадрату натурального числа, если к нему прибавить 100, и равно квадрату другого натурального числа, если к нему прибавить 168. Найдите это число.

33. (МИФИ, 1976 г.). Найдите два натуральных числа, зная, что их сумма равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102.

34. (МИФИ, 1975 г.). Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105.

35. (МИФИ, 1976 г.). Найдите два трехзначных числа, сумма которых кратна 504, а частное кратно 6.

36. (ГГУ, мехмат, физфак, 1979 г.). Представьте число 19 в виде разности кубов натуральных чисел.

37. (МИФИ, 1975 г.). Найдите три числа, если куб первого числа на 2 больше их произведения, куб второго числа на 3 меньше их произведения, а куб третьего числа на 3 больше их произведения.

38. (МИФИ, 1976 г.). Найдите все двузначные числа, удовлетворяющие следующим условиям: сумма цифр числа не менее 7; сумма квадратов цифр не более 30; число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, по крайней мере вдвое меньше данного.

39. (МИФИ, 1980 г.). В четырехзначном числе сумма цифр тысяч, сотен и десятков равна 14, а сумма цифр единиц, десятков и сотен равна 15, причем цифра десятков на 4 больше цифры единиц. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма квадратов цифр принимает наименьшее значение.

40. (МИФИ, 1980 г.). В четырехзначном числе сумма цифр тысяч и десятков равна 4, сумма цифр сотен и единиц равна 15, а цифра единиц больше цифры тысяч на 7. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведения цифры сотен на цифру десятков принимает наименьшее значение.

41. (МИФИ, 1981 г.). Докажите, что если число a равно сумме квадратов двух неравных натуральных чисел, то $2a$ также равно сумме квадратов двух неравных натуральных чисел.

42. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1978 г.). Найдите сумму всех несократимых дробей между 10 и 20 со знаменателем 3.

43. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). m и n — натуральные числа. Найдите все дроби m/n, знаменатель которых на 16 меньше числителя, сама дробь меньше чем сумма утроенного обратного и 2, а числитель не больше 30.

44. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1980 г.). Дана последовательность

$$u_n = \frac{(1+(-1)^n)+1}{5n+6}.$$

Определите количество членов последовательности (u_n), которые удовлетворяют условию $u_n \in]1/100;\ 39/100[$.

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Смешанная бесконечная действительная периодическая дробь в простую дробь обращается по формуле

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m) = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} - \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{n}}.$$

Представьте в виде простых дробей следующие смешанные бесконечные десятичные периодические дроби (**1—4**).

1. (МИСИ, 1977 г.). 7,5(3).

2. (МТИЛП, 1980 г.). 2,1(32).

3. (МТИЛП, 1979 г.). $\dfrac{0{,}23(7)+\dfrac{43}{450}}{0{,}5(61)-\dfrac{113}{495}}$.

4. (МЭСИ, 1979 г.). Найдите x, если $\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}x=10.$

Вычислите (5—31).

5. (ТартГУ, 1980 г.). $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0,2^{-4}\cdot 25^{-2}+(64^{-1/9})^{-3}.$

6. (МЭСИ, 1980 г.). $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2.$

7. (МЭСИ, 1980 г.). $3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right).$

8. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}.$

9. (МТИМБО, 1979 г.). $1+\sec 20^\circ-\sqrt{3}\operatorname{ctg} 40^\circ.$

10. (МГМИ, 1979 г.). $\frac{2^{-2}\cdot 5^3\cdot 10^{-4}}{2^{-3}\cdot 5^2\cdot 10^{-5}}.$

11. (МЭСИ, 1980 г.). $(6-4(5/16)^0)^{-2}+(2/3)^{-1}-3/4.$

12. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{2^{-2}+2^0}{(1/2)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+(2/3)^{-2}}.$

13. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{(0,6)^0-(0,1)^{-1}}{(3/2^3)^{-1}\cdot(3/2)^3+(-1/3)^{-1}}.$

14. (РПИ, 1980 г.).

$$\frac{3^1/_3\sqrt{^9/_{80}}-{^5/_4}\sqrt{^4/_5}+5\sqrt{^1/_5}+\sqrt{20}-10\sqrt{0,2}}{3^1/_2\sqrt{32}-\sqrt{4^1/_2}+2\sqrt{^1/_8}+6\sqrt{^2/_9}-140\sqrt{0,02}}\sqrt{^2/_5}.$$

15. (РПИ, 1980 г.).

$$\frac{2,4\sqrt{8^1/_3}-9\sqrt{^1/_3}+\sqrt{2^1/_{12}}+{^1/_2}\sqrt{^1/_3}-{^1/_3}\sqrt{27}}{1^1/_3\sqrt{4^1/_2}-\sqrt{0,5}+1,5\sqrt{2}+20\sqrt{^1/_{50}}-\sqrt{32}}\sqrt{^2/_3}.$$

16. (МГМИ, 1980 г.).

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+2^{-3/2}\cos\frac{3\pi}{4}.$$

17. (МГМИ, 1980 г.).

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}.$$

18. (МГМИ, 1980 г.).

$$\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1/2}\right)\left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1}-\cos\frac{5\pi}{4}.$$

19. (МГМИ, 1980 г.).

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+(2-2\cos(11\pi/6))^{1/2}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{2+2\cos(\pi/6)}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-1}.$$

20. (МТИЛП, 1980 г.). $\sqrt{25^{1/\log_8 5}+49^{1/\log_6 7}}.$

21. (МВМИ, 1977 г.). $\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(\log_3\frac{1}{9}+\log_{1/9}3\right)\right).$

22. (МВМИ, 1977 г.). $\log_{1/2}(\log_3\cos(\pi/6)-\log_3\sin(\pi/6))$.

23. (МГМИ, 1979 г.). $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-0,5}\cdot 3^{\frac{1}{2}\log_3 6}+1\right)^{1/2}\sin\frac{7\pi}{3}$.

24. (МГМИ, 1979 г.). $\left(7^{1/3}\cdot 3^{-\log_{27}7}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}+3^{1/2}+2\right)^{1/2}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}$.

25. (МГМИ, 1979 г.).

$$\left((128^{3/7}\cdot 27^{1/3}\cdot 10^{-\lg 48})^{-1/2}+\operatorname{ctg}^{-1}\frac{2\pi}{3}\right)^2+2\cdot 6^{1/2}.$$

26. (МГМИ, 1979 г.). $\left(3^{1/2}\cdot 8^{\log_2 3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right)^{1/2}\cos^{-1}\frac{5\pi}{6}$.

27. (МАТИ, 1977 г.).

$(x^{1/3}+y^{1/3})(x^{2/3}-x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})$ при $x=4^5/_7$, $y=5^2/_7$.

28. (ВЗИТиЛП, 1980 г.).

$$\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1 \text{ при } x=16.$$

29. (ПГУ, 1980 г.).

$$\frac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$$

при $a=23$, $b=22$.

30. (МАТИ, 1977 г.). $x^3+3x-14$ при

$$x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}.$$

31. (МГУ, мехмат, 1978 г.). Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это целое число.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе (32—33).

32. (МГИ, 1979 г.). $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

33. (ЯГУ, 1980 г.). $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$.

34. (РПИ, 1977 г.). Сравните два числа $a=\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $b=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$.

35. (ГГУ, 1978 г.). Дано: $1<a<b+c<a+1$, $b<c$. Докажите, что $a<b$.

36. (МВМИ, 1977 г.). Что больше: $\log_3 108$, или $\log_5 375$?

Расположите в порядке возрастания следующие числа (37—39).

37. (МИЭМ, 1979 г.). 0; $\sqrt{0,8}$; 1,2; 11/30; 0,91846.

38. (МИЭМ, 1979 г.). 1; 0,37; 65/63; 61/59; $\operatorname{tg} 33^\circ$; $\operatorname{tg}(-314^\circ)$.

39. (МИЭМ, 1979 г.). 0,02; 1; 0,85; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{0,762}$; $-\cos 571^\circ$.

40. (ГГУ, радиофиз. фак., 1979 г.). Докажите, что $53^{53}-33^{33}$ делится на 10.

Разложите на множители (**41—43**).

41. (МИНХ, 1979 г.). n^4+4.

42. (МИНХ, 1979 г.). $1+n^4+n^8$.

43. (МИНХ, 1979 г.). $1+x^5$.

Упростите следующие выражения (**44—166**).

44. (ОГУ, 1980 г.). $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

45. (ВТУЗЗИЛ, 1977 г.).
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

46. (ВТУЗЗИЛ, 1977 г.). $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

47. (ВТУЗЗИЛ, 1977 г.). $\left(\dfrac{4(a+b)^2}{ab}-16\right)\left(\dfrac{(a+b)^2-ab}{ab}\right):\dfrac{a^3-b^3}{ab}$.

48. (ВЗФЭИ, 1977 г.). $\left(\dfrac{a+3b}{(a-b)^2}+\dfrac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\dfrac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$.

49. (ВЗФЭИ, 1980 г.; ВЗИТиЛП, 1980 г.).
$$\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right).$$

50. (ВЗФЭИ, 1980 г.; ВЗИТиЛП, 1980 г.).
$$\left(\frac{1}{(m+n)^2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(m+n)^3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)m^2n^2.$$

51. (МТИПП, 1980; ВЗПИ, 1980 г.). $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right)\dfrac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$.

52. (МИИЗ, 1978 г.). $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$.

53. (РПИ, 1980 г.). $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$.

54. (МИИЗ, 1978 г.). $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

55. (МЭСИ, 1979 г.).
$$\left(\left(\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right)\right):\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}.$$

56. (МИИЗ, 1979 г.). $\left(\left(\dfrac{y}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

57. (МГМИ, 1980 г.). $\left(\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{8}{a^2+2a}\right)\dfrac{a^2-2a}{4-a}+\dfrac{a+8}{a+2}$.

58. (ТартГУ, 1980 г.).

$$a-\left(\frac{(16-a)a}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}+\frac{3a-2}{a+2}\right):\frac{a-1}{a(a^2+4a+4)}.$$

59. (ВТУЗ ЗИЛ, 1979 г.).

$$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right).$$

60. (МарПИ, 1977 г.). $\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\frac{2^{3/2}}{x^{-2}}\right):\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}.$

61. (РПИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}\right).$$

62. (МИИЗ, 1979 г.). $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

63. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right).$

64. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^{1/2}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{(a^2\sqrt[5]{ab^3})^2}.$

65. (МТИЛП, 1979 г.). $\dfrac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{(\sqrt[3]{a\sqrt{b}})^6}.$

66. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\left(\dfrac{1}{2+2\sqrt{a}}+\dfrac{1}{2-2\sqrt{a}}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right).$

67. (ВЗИТиЛП, 1980 г.; ВЗФЭИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$$

68. (ВЗПИ, 1977 г.; ПГУ, 1980 г.). $\dfrac{x^{1/2}+x^{-1/2}}{1-x}+\dfrac{1-x^{-1/2}}{1+\sqrt{x}}.$

69. (ВЗПИ, 1977 г.). $\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)\cdot\dfrac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}.$

70. (ВЗПИ, 1978 г.). $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}-\dfrac{2}{a^{3/2}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}.$

71. (МТИЛП, 1980 г.). $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right).$

72. (ВЗПИ, 1980 г.). $x^{1/2}+x^{-1/2}+\dfrac{(1-x)(1-x^{-1/2})}{1+\sqrt{x}}.$

73. (МарПИ, 1977 г.). $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

74. (МИИЗ, 1977 г.; ВЗПИ, 1977 г.; РПИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

75. (ВЗПИ, 1980 г.). $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{-1/2}-b^{-1/2}}{a^{-1/2}+b^{-1/2}}$.

76. (МПИ, 1977 г.). $\left(\dfrac{a^{1/2}+2}{a+2a^{1/2}+1}-\dfrac{a^{1/2}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}}$.

77. (МПИ, 1977 г.). $(x+\sqrt{x^2-1})^2+(x+\sqrt{x^2-1})^{-2}+2(1-2x^2)$.

78. (ВЗПИ, 1977 г.). $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

79. ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.; ЯГУ, 1980 г.). $\dfrac{x^{1/2}+1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{1}{x^{3/2}-1}$.

80. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.). $(2^{3/2}+27y^{3/5}):\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}+3y^{1/5}\right)$.

81. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\dfrac{\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{2\sqrt{xy}}{y-x}$.

82. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).

$$2(a+b)^{-1}(ab)^{1/2}\left(1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right)^{1/2}.$$

83. (МПИ, 1977 г.). $\dfrac{b-x}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}-\dfrac{b^{3/2}-x^{3/2}}{b-x}$.

84. (МТИПП, 1978 г.; МГМИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{1}{(a^{1/2}+b^{1/2})^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-1/2}.$$

85. (МТИПП, 1980 г.; ВЗПИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\frac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right)\frac{n^2}{4m\sqrt{m^2-n^2}}.$$

86. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}$.

87. (МАДИ, 1977 г.).

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

88. (МТИПП, 1977 г.).

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2\right)\sqrt{0{,}002}.$$

89. (МТИПП, ВЗПИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{x^{1/2}-y^{1/2}}-\frac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\right)(y^{-1/2}-x^{-1/2}).$$

90. (МИИЗ, 1977 г.). $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

91. (МТИММП, 1977 г.; МАДИ, 1977 г.).

$$(a+a^{1/2}b^{1/2})(a+b)^{-1}\left(\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{-1}-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)^{-1}\right).$$

92. (МТИММП, 1980 г.).

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-1/2}}\right)(a-b)^{-1}.$$

93. (ВЗПИ, 1980 г.). $\left(\frac{p^{3/2}+q^{3/2}}{p-q}-\frac{p-q}{p^{1/2}+q^{1/2}}\right)\left(\sqrt{pq}\,\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}\right)^{-1}.$

94. (ВЗПИ, 1980 г.).

$$((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}):\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^{2}.$$

95. (РПИ, 1980 г.).

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}-1\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}+1\right).$$

96. (РПИ, 1980 г.). $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

97. (МПИ, 1977 г.).

$$\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}+1}:\left(\frac{\sqrt{b}-\frac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right)+\frac{b}{a}\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-1/3}.$$

98. (МАДИ, 1977 г.).

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

99. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).

$$(a^2\sqrt{b})^{-1/2}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

100. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).

$$\left(\frac{a^3-8}{a^2-5a+6}-\frac{(a+1)^2+3}{a-3}+\frac{a^2+a}{\sqrt[4]{a}}\right):\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}.$$

101. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$

102. (МТИММП, 1977 г.).

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2}-\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}.$$

103. (МТИПП, 1978 г.). $\frac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/mn}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{m+1}})}.$

104. (МТИПП, 1977 г.; МИИЗ, 1979 г.).

$$(1-a^2):\left(\left(\frac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}}+a^{1/2}\right)\left(\frac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}}-a^{1/2}\right)\right)+1.$$

105. (МТИМБО, 1981 г.).

$$\frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}.$$

106. (МПИ, 1977 г.).

$$\frac{a+b}{a^{2/3}-a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}-\frac{a-b}{a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}-\frac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}-b^{1/3}}.$$

107. (МПИ, 1977 г.).

$$\left(\frac{x^{1/2}-y^{1/2}}{xy^{1/2}+x^{1/2}y}+\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{xy^{1/2}-x^{1/2}y}\right)\frac{x^{3/2}y^{1/2}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}.$$

108. (МТИПП, 1977 г.; МИНХ, 1979 г.).

$$t\,\frac{1+2(t+4)^{-1/2}}{2-(t+4)^{1/2}}+(t+4)^{1/2}+4(t+4)^{-1/2}.$$

109. (КишПИ, 1980 г.). $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}}\cdot\dfrac{a^{2/3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})}{(a-b)^{1/3}}.$

110. (МИНХ, 1979 г.).

$$\left(\frac{2}{x^2-a^2}\right)^{-1}\left(\frac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\left(\frac{x-(x^2-a^2)^{1/2}}{a^2(x+a)^{1/2}}\right)^{-1}+(x^2+ax)^{-1}\right).$$

111. (РПИ, 1980 г.).

$$\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

112. (ВЗИТиЛП, 1980 г.).

$$\left(\frac{2a+b^{1/2}a^{1/2}}{3a}\right)^{-1}\left(\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

113. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.).

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x:\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+1.$$

114. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.).

$$\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

115. (МПИ, 1977 г.).

$$\frac{1}{2}\left((\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}):\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+1\right)\right)\frac{2(a-b)^{-1}}{(ab)^{-1/2}}.$$

116. (МТИМБО, 1982 г.).

$$a^2(1-a^2)^{-1/2}:\left(\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}\cdot\frac{(1-a^2)^{1/2}+a^2(1-a^2)^{-1/2}}{1-a^2}\right).$$

117. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.; ЛГПИ, 1978 г.).

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x^2:\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

118. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.).

$$\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^2:\sqrt{x}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-1}.$$

119. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.).
$$\frac{(x^{1/3}-y)^2\,(x^{-1/3}y+x^{1/3}y^{-1}+1)}{x^{-2/3}y^2-x^{-1/3}y+x^{2/3}y^{-2}-x^{1/3}y^{-1}}:(x^{1/3}y).$$

120. (ВЗПИ, 1977 г.). $\dfrac{1+a\sqrt[3]{a}+a+\sqrt[3]{a^2}}{1-\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}.$

121. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).
$$\left(\frac{(1-x)^{1/4}}{2\,(1+x)^{3/4}}+\frac{(1+x)^{1/4}\,(1-x)^{-3/4}}{2}\right):(1-x^2)^{1/4}.$$

122. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $(x^{1/4}+y^{1/4}):\left(\left(\dfrac{\sqrt[3]{y}}{y\sqrt{x}}\right)^{3/2}+\left(\dfrac{x^{-1/2}}{\sqrt[8]{y^3}}\right)^2\right).$

123. (ЛПИ, 1980 г.).
$$\frac{x^{3/2}+y^{3/2}-x^{1/2}y^{1/2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)\,(x^{1/2}+y^{1/2})}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

124. (ЛПИ, 1980 г.).
$$\frac{(a-b)^3\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}-\frac{3\,(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$$

125. (ВЗФЭИ, 1980 г.).
$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right)^{-1/2}.$$

126. (МТИМБО, 1982 г.).
$$\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{a-\sqrt{ab}}:\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})\,(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

127. (МТИММП, 1980 г.).
$$\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\left(\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}\right)^{-1}\sqrt[3]{\frac{1}{a^{-2}}}.$$

128. (МТИПП, 1977 г.). $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

129. (ВЗПИ, 1980 г.). $\left(\dfrac{m-n}{m^{3/4}+m^{1/2}n^{1/4}}-\dfrac{m^{1/2}-n^{1/2}}{m^{1/4}+n^{1/4}}\right)\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-1/2}.$

130. (МТИПП, 1977 г.).
$$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

131. (МТИММП, 1977 г.).
$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}-3\sqrt[12]{a^3b^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{b^2}\right),\qquad b>0.$$

132. (МТИПП, 1980 г.). $\dfrac{b-b^{-2}}{b^{1/2}-b^{-1/2}}-\dfrac{1-b^{-2}}{\sqrt{b}+b^{-1/2}}-b^{1/2}.$

133. (МИНХ, 1979 г.).
$$\left(2-\frac{a}{4}-\frac{4}{a}\right)\left((a-4)\sqrt[3]{(a-4)^{-3}}-\frac{(a^2-16)^{-1/2}\,(a-4)^{-1/2}}{(a+4)^{-3/2}}\right)\cdot\frac{a+4}{a-4}.$$

134. (МТИММП, 1980 г.).

$$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

135. (МТИПП, 1978 г.). $$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+4}{x\left(\sqrt{b}+\sqrt{4x^{-1}}\right)^2}.$$

136. (МАИ, 1977 г.). $$\frac{a^2+10a+25+2\sqrt{5}\left(\sqrt{a^3}+5\sqrt{a}\right)}{(a^2-25)\left(\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{125}\right)\left(a+\sqrt{5a}+5\right)^{-1}\right)^{-1}}.$$

137. (МТИПП, 1977 г.).

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right) : \frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}.$$

138. (МЭИ, 1979 г.). $$\left(\frac{3-\sqrt{a}}{9-a}+\frac{1}{3-\sqrt{a}}-6\,\frac{a^2+162}{729-a^3}\right)^{-1}+\frac{a(a+9)}{54}.$$

139. (МЭИ, 1977 г.).

$$-\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{ab}}{b^{3/4}-a^{1/4}b^{1/2}+a^{1/2}b^{1/4}-a^{3/4}}\right)^{-1}+\sqrt{2^{\log_4 a}}.$$

140. (МЭИ, 1977 г.).

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\frac{3}{a+1}+\frac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[3]{a^2}-1}\right)^{-1}\left(\frac{a^{-1/3}+1}{a^{1/3}}\right)^2-a^{\frac{2}{3}\log_2\frac{1}{4}}.$$

141. (МЭИ, 1977 г.).

$$\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)^2\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt[4]{16ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}.$$

142. (МЭИ, 1978 г.).

$$\left((a^{1/4}-a^{1/8}+1)^{-1}+(a^{1/4}+a^{1/8}+1)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{a}-2}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1}\right)^{-1}-2^{\log_4 a-2}.$$

143. (МЭИ, 1978 г.).

$$\left(\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}+x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{y}+y\sqrt[3]{x}}-1\right)^{-1}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}\right)^{-1}+1\right)^{1/3}\sqrt[3]{x-y}.$$

144. (МЭИ, 1977 г.). $$\frac{a+10\sqrt{a}+\sqrt{20}\left(\sqrt[4]{a^3}+5\sqrt[4]{a}\right)+25}{(a-25)\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt{125}\right)^{-1}\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{25a}+5\right)}.$$

145. (МЭИ, 1978 г.).

$$\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\sqrt[4]{16ab}}{a-b}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

146. (МЭИ, 1979 г.). $$\left(\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt[4]{a}}{\sqrt{16a}+12\sqrt[4]{a}+9}-\frac{\sqrt[4]{a}-3}{2\sqrt[4]{a}+3}\right)\times$$

$$\times\left(2\cdot 3^{\log_{81}a}+3\right).$$

147. (МИРЭА, 1977 г.).

$$2\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^{-2}.$$

148. (МЭИ, 1980 г.).

$$\frac{2a\sqrt[3]{ab^2}-a\sqrt[6]{ab^5}-ab}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}-2^{1+2\log_8 a+\log_8 b}.$$

149. (ЯГУ, 1980 г.). $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$.

150. (МТИМБО, 1982 г.).

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{\left(a^6+\frac{3a^4}{b^{-2}}+\frac{a^2b^4}{3^{-1}}+\frac{1}{b^{-6}}\right)^{2/3}+\left[\frac{(b^{2/3}-a^{2/3})^3-2a^2-b^2}{a^2+(b^{2/3}-a^{2/3})^3+2b^2}\right]^{-3}}.$$

151. (МТИМБО, 1980 г.). $\left(\frac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+$

$$+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}.$$

152. (МТИМБО, 1980 г.).

$$\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3+2x+a}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3-(x+2a)}\right)^3+\sqrt{(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)^{2/3}}:a \text{ при } x>a.$$

153. (МИФИ, 1978 г.). $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\frac{2a}{a+b}$, $0<a<b$.

154. (МТИ, 1977 г.).

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1, \qquad 0<x<1.$$

155. (МТИПП, 1977 г.).

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}, \quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right), \qquad a>0,\ b>0.$$

156. (МГМИ, 1980 г.).

$$\frac{(m+x)^{1/2}+(m-x)^{1/2}}{(m+x)^{1/2}-(m-x)^{1/2}}, \quad x=\frac{2mn}{n^2+1}, \qquad m>0,\ 0<n<1.$$

157. (МЭИ, 1977 г.).

$$\frac{((3b^2+2a^2)^2-24a^2b^2)^{1/2}}{3b-a^2\cdot 2^{1-\log_2 b}}+\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+2b\sqrt{a-b^2}},$$

$$a/b>\sqrt{3/2},\ b>0,\ a\geqslant b^2.$$

158. (МТИПП, 1977 г.).

$$\left((a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right)(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right),$$

1) $a+b>0$, $a-b>0$; 2) $a+b<0$, $a-b<0$.

159. (МГМИ, 1980 г.). $\frac{\sqrt[3]{a+\sqrt{2-a^2}}\,\sqrt[6]{1-a\sqrt{2-a^2}}}{\sqrt[3]{1-a^2}}$.

160. (МТИ, 1981 г.). $\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}$.

161. (МВИМУ, 1981 г.). $\dfrac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^{-2}}}}$.

162. (МТИПП, 1981 г.). $\dfrac{1-a^{-1/2}}{1+a^{1/2}}-\dfrac{a^{1/2}-a^{-1/2}}{a-1}$ и вычислите при $a=5$.

163. (МТИПП, 1981 г.). $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{(a^2-ab)^{2/3}}:\dfrac{a^{-2/3}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ и вычислите при $a=1,2$; $b=3/5$.

164. (МТИПП, 1981 г.). $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ и вычислите при $a=-2,5$; $b=0,5$.

165. (РГУ, физфак, 1981 г.).

$$f(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{1/2}$$

и вычислите при $x=9$, $y=0,04$.

166. (ЛатвГУ, 1980 г.). Докажите тождество

$$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=\frac{1-b}{1+b}.$$

167. (МИНХ, 1977 г.). Укажите область определения функции и упростите заданное выражение

$$y=x\frac{1+2(x+4)^{-0,5}}{2-(x+4)^{0,5}}+(x+4)^{0,5}+4(x+4)^{-0,5}.$$

168. (МЭИ, 1976 г.). Докажите, что если

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

то $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

169. (ЛГПИ, матфак, 1979 г.). Найдите значение выражения $\left(\dfrac{(x^2+a^2)^{1/2}+(x^2-a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^{1/2}-(x^2-a^2)^{1/2}}\right)^{-2}$ при $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, $a>0$, $m>0$, $n>0$, $m>n$.

170. (ЛГПИ, 1981 г.). Найдите область определения и упростите выражение $A=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$.

§ 3. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА

Метод математической индукции

Метод доказательства, называемый методом математической индукции, основан на принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Принцип математической индукции: Предложение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

1. Предположение $A(n)$ истинно для $n=1$.

2. Из предположения, что $A(n)$ истинно для $n=k$ (где k — *любое* натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n=k+1$.

Доказательство методом математической индукции состоит из двух частей: в первой части проверяют истинность $A(1)$; во второй части предполагают истинность $A(n)$ для $n=k$ и доказывают справедливость $A(n)$ для $n=k+1$, т. е. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Если доказано, что $A(1)$ истинно, и из истинности $A(n)$ для $n=k$ следует истинность $A(n)$ для $n=k+1$ (при любом натуральном k), то $A(n)$ истинно для всех натуральных n.

Пример 1. Докажите, что при $x > -1$ неравенство (Я. Бернулли)

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \tag{1}$$

верно для любого натурального n.

1) При $n=1$ имеем $(1+x)^1 = 1+x$. Одно из соотношений $>$ или $=$ имеет место, поэтому $A(1)$ истинно.

2) Докажем, что из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k+1)$ для любого натурального k. Пусть неравенство

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx \tag{2}$$

истинно. Умножим обе части неравенства (2) на $1+x$. Так как $1+x>0$, то

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x),$$

или

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x+kx^2;$$

учитывая, что $kx^2 \geqslant 0$, заключаем:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x,$$

т. е. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Так как неравенство (1) верно при $n=1$ и из истинности этого неравенства при $n=k$ для любого натурального k следует его истинность при $n=k+1$, то согласно принципу математической индукции неравенство (1) истинно при всех натуральных n.

Методом математической индукции доказываются предложения, определенные при целых отрицательных n (проведя замену $n=-m$), а также предложения, определенные на множестве целых чисел, начиная с $n=m$. В последнем случае доказательство основывается на следующем обобщении принципа математической индукции.

Если предложение $A(n)$, в котором n — целое число, истинно при $n=m$ и из истинности этого предложения для $n=k$, где k — любое целое число, большее или равное m, следует, что оно верно для $n=k+1$, то предложение $A(n)$ истинно для любого целого $n \geqslant m$.

Пример 2. Докажите, что неравенство

$$2^n > 2n+1 \qquad (3)$$

верно при всех натуральных $n \geqslant 3$.

1) Если $n=3$, то $2^3 > 2\cdot 3+1$, т. е. $A(3)$ истинно.

2) Докажем, что из истинности неравенства при $n=k$ для любого натурального $k \geqslant 3$ следует его истинность для $n=k+1$. Итак, пусть

$$2^k > 2k+1; \qquad (4)$$

тогда $2^k+2^k > 4k+2$, т. е.

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1+(2k-1). \qquad (5)$$

Так как при всех натуральных $k > 1$ $2k-1 > 0$, то из справедливости (5) следует справедливость неравенства

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1,$$

т. е. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Таким образом, обе части доказательства проведены, следовательно, неравенство (3) справедливо для любого $n \geqslant 3$.

Докажите утверждения следующих задач (**1**—**10**).

1. (КПИ, 1981 г.). Докажите, что n^3+3n^2+5n+3 при любом натуральном n делится на 3.

2. (ЛьвГУ, 1980 г.). Докажите, что при любом натуральном n число $4^n+15n-1$ кратно 9.

3. (МИФИ, 1977 г.). Докажите, что $2^n > n^2$ при любом натуральном $n \geqslant 5$.

4. (МИФИ, 1977 г.). Докажите, что при любом нечетном n выражение n^3-n делится на 24.

5. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Докажите, что для произвольного натурального $n \geqslant 2$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

6*. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.). Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

7*. (МИРЭА, 1977 г.). Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$.

8. (МИНХ, 1977 г.; КуйбГУ, 1977 г.; ЛГУ, матмех, 1977 г.). Докажите, что $|\sin m\alpha| \leqslant m|\sin\alpha|$ при любом натуральном m и любом $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

9*. (МИФИ, 1977 г.). Докажите, что при любом целом неотрицательном n: $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

10. (МИФИ, 1977 г.). Докажите, что при любом натуральном $n > 1$: $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$.

Комбинаторика

Перестановки. Число перестановок. Установленный в конечном множестве порядок называют *перестановкой* его элементов. Число перестановок конечного множества элементов зависит только от числа элементов, для множества из n элементов число перестановок обозначают через P_n. Множество из одного элемента можно упорядочить единственным образом: единственный элемент множества считается первым, поэтому $P_1 = 1$. Методом математической индукции доказывается, что P_n равно произведению n первых натуральных чисел:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{1}$$

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ обозначается $n!$. Поэтому $P_n = n!$. По определению считают $P_0 = 0! = 1$.

Размещения. Число размещений. Множество вместе с заданным порядком расположения его элементов называют *упорядоченным* множеством. Упорядоченные множества записывают, располагая в круглых скобках его элементы в заданном порядке. Например, $(А; Б; В)$ — упорядоченное множество с первым элементом $А$, вторым элементом $Б$ и третьим элементом $В$.

Конечные упорядоченные множества называются *размещениями*. Число размещений по m элементов в каждом, составленных из данных n элементов, обозначают через A_n^m. Методом математической индукции доказывается, что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

Эта формула записывается также в виде

$$A_n^m = n(n-1) \ldots (n-m+1). \tag{3}$$

Сочетания. Число сочетаний. Свойства числа сочетаний. В комбинаторике конечные множества называют *сочетаниями*. Число сочетаний из n по m (т. е. число подмножеств по m элементов в каждом, содержащихся в множестве из n элементов) обозначается через C_n^m.

Подсчитывая число размещений из n по m, можно получить, что

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m, \tag{4}$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{5}$$

Эта формула записывается также в виде

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}. \tag{6}$$

Для любых n и m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ верно равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{7}$$

Действительно,

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!}=C_n^{n-m}.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n. \tag{8}$$

Доказать это равенство можно также, положив в формуле Ньютона $a=b=1$. Справедливость формулы следует также из того, что сумма

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$$

есть полное число подмножеств множества из n элементов, а оно равно 2^n.

Для любых n и m таких, что $0\leqslant m<n$, справедливо равенство

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}. \tag{9}$$

Доказательство можно провести, представив C_n^m и C_n^{m+1} по формуле (5) и сложив полученные дроби.

Решите следующие уравнения (**11**—**26**).

11. (МТИММП, 1977 г.). $\dfrac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}}=\dfrac{2}{3}$, $x\in\boldsymbol{N}$.

12. (МТИПП, 1977 г.). $A_{x-1}^2-C_x^1=79$, $x\in\boldsymbol{N}$.

13. (МИХМ, 1977 г.). $3C_{x+1}^2-2A_x^2=x$, $x\in\boldsymbol{N}$.

14. (МТИММП, 1977 г.). $\dfrac{C_{x+1}^2}{C_x^3}=\dfrac{4}{5}$, $x\in\boldsymbol{N}$.

15. (МТИПП, 1977 г.). $12C_x^1+C_{x+4}^2=162$, $x\in\boldsymbol{N}$.

16. (МАТИ, 1977 г.). $A_{x+1}^3+C_{x+1}^{x-1}=14(x+1)$, $x\in\boldsymbol{N}$.

17. (ЯПИ, 1977 г.). $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$, $x\in\boldsymbol{N}$.

18. (МТИММП, 1977 г.). $C_{x+1}^{x-4}=\dfrac{7}{15}A_{x+1}^3$, $x\in\boldsymbol{N}$.

19. (МИХМ, 1977 г.). $C_{x+1}^3:C_x^4=6:5$, $x\in\boldsymbol{N}$.

20. (МИХМ, 1980 г.). $C_{x+1}^2\cdot A_x^2-4x^3=(A_{2x}^1)^2$, $x\in\boldsymbol{N}$.

21. (МИХМ, 1980 г.). $3C_{x+1}^2+P_2\cdot x=4A_x^2$, $x\in\boldsymbol{N}$.

22. (МЭСИ, 1977 г.; РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). $C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^m:C_{n+1}^{m-1}=5:5:3$.

23. (МАТИ, 1977 г.). $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5\cdot P_{x-5}}=720$, $x\in\boldsymbol{N}$.

24. (МГУ, фак. вычислит. матем. и киберн., 1978 г.).

$$A_{x+3}^2=C_{x+2}^3+20,\quad x\in\boldsymbol{N}.$$

25. (МТИМБО, 1978 г.). $C_x^3+C_x^4=11\cdot C_{x+1}^2$, $x\in\boldsymbol{N}$.

26. (РГУ, мехмат, вечерн. отд., 1977 г.). $11C_x^3=24C_{x+1}^2$.

27. (МИФИ, 1977 г.). Упростите выражение

$$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n,\qquad n\in\boldsymbol{N},$$

освободившись от C_n^k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Решите следующие неравенства (28—37).

28. (РГУ, мехмат, 1977 г.). $C_{13}^{m} < C_{13}^{m+2}$, $m \in N$.

29. (РГУ, физфак, 1977 г.). $C_{18}^{m-2} > C_{18}^{m}$, $m \in N$.

30. (РГУ, мехмат, 1977 г.). $C_n^6 < C_n^4$, $n \in N$.

31. (РГУ, мехмат, 1977 г.). $5C_n^3 < C_{n+2}^4$, $n \in N$.

32. (РГУ, мехмат, 1977 г.). $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4} A_{x-2}^2 < 0$, $x \in N$.

33. (МТИЛП, 1977 г.). $C_{x+1}^{x-1} > 3/2$, $x \in N$.

34. (МТИММП, 1977 г.). $C_{x+1}^{x-1} < 21$, $x \in N$.

35. (ЯГУ, физфак, 1978 г.). $2C_n^5 > 11C_{n-2}^3$, $n \in N$.

36. (ЯГУ, физфак, 1978 г.). $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leqslant 100$, $n \in N$.

37. (МАИ, 1977 г.). $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n-1}^{n-3}} > 14P_3$, $n \in N$.

38. (МГУ, физфак, 1977 г.). Сколько отрицательных членов в последовательности (x_n), где $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}$, $n \in N$.

39. (МГУ, физфак, 1977 г.). Сколько положительных членов в последовательности (x_n), если $x_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}}$, $n \in N$.

40. (МГУ, физфак, 1977 г.). Найдите отрицательные члены последовательности $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$, $n \in N$.

41. (КГУ, мехмат, 1977 г.). На одной стороне треугольника взято n точек, на другой — m точек и на третьей — k точек, причем ни одна точка не является вершиной этого треугольника. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

42. (КГУ, геофак, 1977 г.). За одним столом надо рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

43. (КГУ, геофак, 1977 г.). Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

44. (МИУ, 1978 г.). В 12-ти этажном доме на первом этаже в лифт садится 9 человек. Известно, что они выйдут группами в 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать, если на 2-м этаже лифт не останавливается?

45. (МИЭМ, 1977 г.). В хирургическом отделении работает 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе: а) хирурга и ассистента; б) хирурга и четырех его ассистентов?

46. (ЛГУ, матмех, 1977 г.). Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

47. (ЛГУ, физфак, 1977 г.). Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по k ящикам?

48. (ЛГУ, фак. прикладной матем. и процессов управления, 1977 г.). В 10 урнах распределены 6 белых и 6 черных одина-

ковых по размеру шаров, причем в каждой урне имеется хотя бы один шар. Сколько существует различных вариантов распределения шаров?

49. (УрГУ, матмех, 1977 г.). На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть, чтобы не все девушки оказались сидящими рядом?

50*. (МИУ, 1978 г.). Семь различных предметов нужно распределить между тремя людьми. Сколькими способами это можно сделать, если одному или двум из них может не достаться ни одного предмета?

51*. (ЛГУ, биол.-почв. и географ. фак., 1977 г.). Сколько существует натуральных чисел меньших 10^4 и делящихся на 4, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0, 1, 2, 3, 5, которые ни в одном из этих чисел не повторяются?

52. (ЯГУ, матфак, 1978 г.). Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

53. (ВЗЭИС, 1978 г.). Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

54. (ЛГУ, фак. экономической кибернетики, химический, психологии, 1977 г.). Сколько существует натуральных чисел меньших 10^4, в записи которых в десятичной системе все числа различны?

55. (ЛФЭИ, 1977 г.). Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

56*. (УрГУ, 1977 г.). Сколько есть четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

57*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сколько существует различных семизначных чисел, сумма цифр которых четная?

58*. (КГУ, ВМК, 1978 г.). Сколько различных 4-х значных чисел можно написать, пользуясь цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы в каждом из них была только одна единица, если любая другая цифра может встречаться в записи этих чисел несколько раз?

59*. (КГУ, 1978 г.). Сколько различных семизначных чисел можно написать, пользуясь только тремя цифрами 1, 2, 3, при условии, чтобы цифра 2 в каждом числе встречалась 2 раза?

60*. (ЛГУ, матмех и фак. прикладной матем. и процессов управления, 1977 г.). Сколько шестизначных чисел содержит точно четыре различных цифры?

61*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сколько различных чисел, меньших чем $2 \cdot 10^8$, которые делятся на 3, можно написать при помощи цифр 0, 1 и 2 (начинаться с 0 числа не могут)?

62*. (КГУ, мехмат, 1977 г.). Сколько есть четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

63*. (МИНХ, 1978 г.). Из 18 разных цветков нужно составить букет так, чтобы в него входило не менее 3-х цветков. Сколько различных способов существует для составления такого букета?

64*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сколько различных чисел, меньших $2\cdot 10^8$, можно написать при помощи цифр 1 и 2?

65*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сколько существует различных шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три нечетные?

66*. (КГУ, ВМК, 1978 г.). Сколько различных четырехзначных чисел можно написать, пользуясь только по разу цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы в каждом из них была единица?

67*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сколько существует различных шестизначных чисел, сумма цифр которых нечетная?

68. (МИФИ, 1978 г.). В шахматном турнире среди участников были две женщины. Каждый участник турнира играл с остальными участниками по 2 партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего было участников в турнире и сколько всего партий было сыграно?

Бином Ньютона

Формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1)$$

справедливая при любом натуральном n, называется ***формулой Ньютона*** или *биномом Ньютона*. Коэффициенты C_n^k формулы (1) называются *биномиальными коэффициентами*: $(k+1)$-е слагаемое суммы (1) считается *k-м членом* разложения и обозначается через T_k:

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \qquad (2)$$

69. (МИУ, 1978 г.). Найдите наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096.

70. (МТИЛП, 1977 г.). Найдите средний член разложения $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$.

71. (ВЗЭИС, 1978 г.). В разложении $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a^4}\right)^n$ коэффициент второго члена разложения на 44 больше коэффициента первого члена. Найдите n.

72. (МХТИ, 1977 г.). Найдите член разложения $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$, не содержащий x.

73. (ЛФЭИ, 1977 г.). Найдите член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a.

74. (МТИПП, 1977 г.). Найдите член разложения $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$, содержащий x во второй степени.

75. (МТИММП, 1977 г.). Найдите второе слагаемое разложения бинома $\left(\sqrt[13]{a}+\frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$, если $C_m^3:C_m^2=4:1$.

76. (МТИММП, 1977 г.). Найдите третий член разложения $\left(z^2+\frac{1}{z}\sqrt[3]{z}\right)^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов этого разложения равна 2048.

77. (МИЭТ, 1977 г.). Определите x в выражении $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$, если отношение седьмого слагаемого от начала в разложении бинома к седьмому слагаемому от конца равно 1/6.

78. (МИУ, 1978 г.). Определите номер члена разложения бинома $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$, который содержит a^7.

79. (МЭСИ, 1977 г.). В разложении $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент второго члена на 44 больше биномиального коэффициента первого члена. Найдите номер члена, не содержащего x.

80. (МХТИ, 1978 г.). Найдите член разложения $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x.

81. (МТИПП, 1978 г.). Коэффициент при x во втором члене разложения $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ равен 31. Найдите степень n.

82. (ЛГУ, фак. экономический, химический, психологии, 1978 г.). Сумма коэффициентов трех первых слагаемых разложения $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^m$ равна 97. Найдите член разложения, содержащий x^4.

83. (МАТИ, 1977 г.). Определите A_n^2, если пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

84. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите, при каких значениях x в разложении бинома $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ сумма третьего и пятого слагаемых равна 135, а сумма биномиальных коэффициентов трех последних слагаемых равна 22.

85. (МИЭТ, 1977 г.). При каком x четвертое слагаемое разложения бинома $\left(\sqrt{x}^{1/(\lg x+1)}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ равно 200?

86. (МИНГП, 1978 г.). В разложении $\left(2^x+\frac{1}{4^x}\right)^n$ сумма биномиальных коэффициентов первого и второго членов разложения равна 36, а второй член разложения в 7 раз больше первого. Найдите x.

87. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите, при каких значениях x разность между четвертым и шестым слагаемыми разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$ равна 56, если известно, что показатель бинома m на 20 меньше, чем биномиальный коэффициент третьего слагаемого разложения.

88. (МИФИ, 1977 г.). Найдите x, если известно, что второй член разложения бинома $(x+x^{\lg x})^5$ равен 1000000.

89. (МАИ, 1977 г.). При каком значении x шестое слагаемое разложения степени бинома $\left(2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)}\right)^7$ равно 84?

90*. (МИНХ, 1977 г.). Докажите неравенство $n^{n+1}>(n+1)^n$, $n\geqslant 3$, $n\in \mathbf{N}$.

91. (МИФИ, 1977 г.). Найдите показатель n бинома $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$, если 9-й член разложения имеет наибольший коэффициент.

92. (МИСиС, 1978 г.). Найдите наибольший по модулю член разложения бинома $(a+b)^{50}$, если $|a|=\sqrt{3}\,|b|$.

93. (МФТИ, 1979 г.). В разложении бинома $(1+x)^n$ по возрастающим показателям степеней x третье слагаемое в четыре раза больше пятого, а отношение четвертого слагаемого к шестому равно 40/3. Найдите n и x.

94. (РГУ, мехмат, 1977 г.). Упростите выражение

$$\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$$

и найдите член разложения, который не содержит x.

95. (РГУ, мехмат, 1977 г.). Сумма коэффициентов первого, второго и третьего слагаемых разложения $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^m$ равна 46. Найдите член разложения, не содержащий x.

§ 4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Решите следующие уравнения (**1**—**3**).

1. (КишПИ, 1980 г.). $|x+2|=2(3-x)$.

2. (МАТИ, 1979 г.). $|3x-2|+x=11$.

3. (МИИГАиК, 1980 г.). $|x|-|x-2|=2$.

4. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее уравнение $|x-3|+2|x+1|=4$.

5. (МАИ, 1981 г.). Найдите все $a\in \mathbf{R}$, при которых уравнение $a^3+a^2|a+x|+|a^2x+1|=1$ имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

Решите следующие неравенства (**6**—**11**).

6. (МСИ, 1977 г.). $|5-2x|<1$.

7. (МСИ, 1977 г.). $|3x-2{,}5|\geqslant 2$.

8. (КишПИ, 1980 г.). $|x-2|\leqslant|x+4|$.

9. (МТИЛП, 1977 г.). $|2x-4|<x-1$.

10. (МГУ, географ. фак., 1967 г.). $2|x+1|>x+4$.

11. (МАТИ, 1977 г.). $|x+2|-|x-1|<x-{}^3/_2$.

12. (МЭСИ, 1980 г.). Решите неравенство $|x+1|+|x-4|>7$, указав наименьшее целое положительное x, удовлетворяющее этому неравенству.

13. (МТИЛП, 1981 г.). Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1$.

14. (СимфПИ, 1981 г.). Найдите b, если корни уравнения $24x^2+bx+25=0$ действительны и $x_2=1{,}5x_1$.

15. (МГМИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения $(|x|+1)^2=4|x|+9$, принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{5-2x}$.

16. (МГМИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения $(3|x|-3)^2=|x|+7$, принадлежащие области определения $y=\sqrt{x(x-3)}$.

17. (МГМИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения $(2|x|-1)^2=|x|$, принадлежащие области определения функции $y=\lg(4x-1)$.

18. (МГМИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения $9x^2-18|x|+5=0$, принадлежащие области определения функции $y=\ln((x+1)(x-2))$.

Решите аналитически и графически следующие уравнения (19—22).

19. (МИСиС, 1979 г.). $|x^2+4x+2|=(5x+16)/3$.

20. (МИСиС, 1979 г.). $|x^2-2x-1|=(5x+1)/3$.

21. (МИСиС, 1979 г.). $|x^2-4x+2|=(5x-4)/3$.

22. (МИСиС, 1979 г.). $|x^2-6x+7|=(5x-9)/3$.

Решите уравнения (23—25).

23. (ЯГУ, 1980 г.). $x^2+|x-1|=1$.

24. (ПГУ, 1980 г.).
$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)=4500$.

25. (МАТИ, 1979 г.). $x|x-4|+a=0$.

26. (ЯГУ, 1980 г.). При каких значениях a уравнение $9x^2-2x+a=6-ax$ имеет равные корни?

27. (РПИ, 1980 г.). Найдите значение k, при котором уравнение $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$ имеет равные корни.

28. (ОГУ, 1980 г.). Найдите значения a, при которых корни уравнения $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$ равны между собой.

29. (МАМИ, 1976 г.). При каких значениях m уравнение $x^2-x+m=0$ не имеет действительных корней?

30. (МАМИ, 1977 г.). При каких значениях m уравнение $x^2-x+m^2=0$ не имеет действительных корней?

31. (МСИ, 1980 г.). При каких значениях m уравнение $mx^2-(m+1)x+2m-1=0$ не имеет действительных корней?

32. (МСИ, 1980 г.). При каких значениях c уравнение $(c-2)x^2+2(c-2)x+2=0$ не имеет действительных корней?

33. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите целые значения k, при которых уравнение $(k-12)x^2+2(k-12)x+2=0$ не имеет действительных корней.

34. (ВГУ, геолог. и географ. фак., 1980 г.). При каких значениях a уравнение $x^2+2a\sqrt{a^2-3}x+4=0$ имеет равные корни?

35. (МХТИ, 1977 г.). Найдите значение коэффициента a, при котором кривая $y=x^2+ax+25$ касается оси Ox.

36. (МВМИ, 1977 г.). Найдите значение k, при котором кривая $y=x^2+kx+4$ касается оси Ox.

37. (МТИЛП, 1980 г.). Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$, $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$.

38. (МарПИ, 1977 г.). При каких значениях k неравенство $x^2-(k-3)x-k+6>0$ справедливо при всех действительных x?

39. (УрГУ, матмех, 1979 г.). При каких значениях a неравенство $ax^2+2ax+0{,}5>0$ выполняется на всей числовой оси?

40. (МЭСИ, 1980 г.). При каком целом k неравенство

$$x^2-2(4k-1)x+15k^2-2k-7>0$$

верно при любом действительном x?

41. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите наименьшее целое значение k, при котором уравнение $x^2-2(k+2)x+12+k^2=0$ имеет два различных действительных корня?

42. (МИСиС, 1977 г.). При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ равна нулю?

43. (МИТХТ, 1977 г.). При каких значениях a уравнение $x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$ имеет действительные корни?

44. (ПГУ, 1980 г.). При каких значениях a графики функций $y=2ax+1$ и $y=(a-6)x^2-2$ не пересекаются?

45. (МИНГП, 1979 г.). При каких значениях p вершина параболы $y=x^2+2px+13$ лежит на расстоянии 5 от начала координат?

46. (РПИ, 1980 г.). Найдите значение a, при котором один корень уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого.

47. (РПИ, 1977 г.). При каких значениях a отношение корней уравнения $x^2+ax+a+2=0$ равно 2?

48. (РПИ, 1977 г.). При каких значениях a отношение корней уравнения $ax^2-(a+3)x+3=0$ равно 1,5?

49. (МАИ, 1977 г.; МГИ, 1979 г.). При каких значениях a корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-(3a+2)x+a^2=0$ удовлетворяют соотношению $x_1=9x_2$? Найдите эти корни.

50. (РПИ, 1978 г.). Определите a так, чтобы один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ был квадратом другого.

51. (ВГУ, 1980 г.). Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+px+12=0$ обладают свойством $x_2-x_1=1$. Найдите p.

52. (ВГУ, геолог. и географ. фак., 1980 г.). В уравнении $5x^2-kx+1=0$ определите k так, чтобы разность корней уравнения равнялась единице.

53. (РПИ, 1977 г.). При каком значении a разность между корнями уравнения $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ равна 3?

54. (МЭСИ, 1979 г.). В уравнении $5x^2+bx-28=0$ найдите b, если корни уравнения x_1 и x_2 находятся в зависимости $5x_1+2x_2=1$ и b — целое число.

55. (МХТИ, 1979 г.). В уравнении $x^2-4x+p=0$ найдите p, если известно, что сумма квадратов его корней равна 16.

56. (МТИПП, 1978 г.). При каких значениях a разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ равна их произведению?

57. (БГУ, 1980 г.). Найдите все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов его корней.

58. (ВГУ, геолог. и географ. фак., 1980 г.). Определите коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

59. (ЛатвГУ, 1980 г.). При каких значениях a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

60*. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1978 г.). Даны два квадратных уравнения $x^2-x+m=0$, $x^2-x+3m=0$, $m\neq 0$. Найдите значение m, при котором один из корней второго уравнения равен удвоенному корню первого уравнения.

61. (МГМИ, 1979 г.). Трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, $a+b+c<0$. Найдите знак числа c.

62. (ЯГУ, 1980 г.). Выразите $x_1^3+x_2^3$ через коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$, где x_1, x_2 — его корни.

63. (КГУ, 1978 г.). Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-ax+2a-1=0$. Вычислите $x_1^3+x_2^3$.

64. (БГУ, 1980 г.). Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$, найдите сумму кубов его корней.

65. (КГУ, 1977 г.). Вычислите $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2-3ax-2=0$.

66. (РПИ, 1978 г.). При каких a уравнение $(2-x)(x+1)=a$ имеет действительные и положительные корни?

67. (МТИММП, 1977 г.). Найдите все значения p, при которых корни уравнения $(p-3)x^2-2px+5p=0$ действительны и положительны.

68. (РПИ, 1978 г.). Найдите все значения a, для которых неравенство $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ выполняется при всех $x\in \boldsymbol{R}$.

69. (РПИ, 1978 г.). Найдите все значения a, для которых неравенство $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ выполняется при всех значениях a.

70. (ВГУ, матфак, 1979 г.). Найдите все значения a, для которых неравенство $(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0$ выполняется при всех действительных x.

71. (МЭСИ, 1980 г.). При каком наименьшем целом k трехчлен $(k-2)x^2+8x+k+4$ положителен при всех значениях x?

72. (КПИ, 1978 г.). Решите неравенство $x^2+ax+a>0$.

73. (КиевГПИ, 1978 г.). Найдите все действительные значения m, при которых неравенство $mx^2-4x+3m+1>0$ удовлетворяется при всех положительных x.

74. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ больше 3.

75. (МАИ, 1979 г.). Составьте квадратное уравнение, произведение корней x_1 и x_2 которого равно четырем, и $\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{a^2-7}{a^2-4}$.

76. (МАИ, 1979 г.). Составьте квадратное уравнение, сумма корней x_1 и x_2 которого равна двум и $\frac{1-x_1}{1+x_2}+\frac{1-x_2}{1+x_1}=2\frac{4a^2+15}{4a^2-1}$.

77. (МИИГАиК, 1978 г.). При каких значениях a корни уравнения $x^2-4ax+1=0$ действительные и удовлетворяют условиям $x_1 \geqslant a$, $x_2 \geqslant 0$?

78. (МАИ, 1979 г.). При каких значениях $a \in \boldsymbol{R}$ уравнение $ax^2+x+a-1=0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$?

79. (МАИ, 1979 г.). При каких значениях $a \in \boldsymbol{R}$ уравнение $x^2+1=x/a$ имеет два действительных различных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $|x_1^2-x_2^2|>1/a$?

80. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите все значения a, при которых неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$ выполняется при всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$.

81*. (МГУ, геофизика, 1977 г.). Найдите все значения k, при которых любое действительное x является решением хотя бы одного из неравенств

$$x^2+5k^2+8k>2(3kx+2)$$

и

$$x^2+4k^2 \geqslant k(4x+1).$$

82*. (КиевГПИ, 1981 г.). При каких действительных a корни уравнения $x^2-2x-a^2+1=0$ лежат между корнями уравнения $x^2-2(a+1)x+a(a-1)=0$?

83. (КиевГПИ, 1981 г.). При каких значениях a всякое решение неравенства $x^2-x-2<0$ больше любого решения неравенства $ax^2-4x-1 \geqslant 0$?

Решите следующие неравенства (84—109).

84. (МИИЗ, 1978 г.). $3x^2-7x+4 \leqslant 0$.

85. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $3x^2-7x+6<0$.

86. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $3x^2-7x-6<0$.

87. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $x^2-3x+5>0$.

88. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $x^2-14x-15>0$.

89. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $2-x-x^2 \geqslant 0$.

90. (МИНХ, 1979 г.). $x^2-5|x|+6<0$.

91. (БГУ, 1980 г.). $x^2-|x|-2 \geqslant 0$.

92. (МИИГАиК, 1977 г.). $|x^2-4x|<5$.

93. (МАТИ, 1980 г.). $|x^2+x|-5<0$.

94. (МИИГАиК, 1977 г.; БашГУ, 1980 г.) $|x^2-5x|<6$.

95. (МИФИ, 1980 г.). $|x^2-2x|<x$.

96. (МИНХ, 1980 г.). $|x^2-2x-3|<3x-3$.

97. (МИЭТ, 1977 г.). $|x^2-3x|+x-2<0$.

98. (МИИГАиК, 1978 г.). $x^2-7x+12<|x-4|$.

99. (МГУ, геофизика, 1977 г.). $x^2-|5x-3|-x<2$.

100. (МИИГАиК, 1978 г.). $|x-6|>x^2-5x+9$.

101. (МИИГАиК, 1978 г.). $|x-6|<x^2-5x+9$.

102. (МГУ, геофизика, 1977 г.). $|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9$.
103. (МГУ, геофизика, 1977 г.). $3x^2-|x-3|>9x-2$.
104. (МГУ, геофизика, 1977 г.). $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x$.
105. (МАТИ, 1980 г.). $x^2-|5x+8|>0$.
106. (МИНХ, 1979 г.). $3|x-1|+x^2-7>0$.
107. (МИУ, 1978 г.). $|x-6|>|x^2-5x+9|$.
108. (МАТИ, 1977 г.). $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.
109. (ЯГУ, 1980 г.). $|x^2-2x-8|>2x$.
110. (МТИПП, 1981 г.). При каких значениях k уравнение $kx^2+12x-3=0$ имеет корень, равный 1/5?
111. (МГУ, химфак, 1981 г.). При каких значениях параметра a неравенство $(a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2})x^2+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$ выполняется для любого $x>0$?
112. (МГУ, психфак, 1981 г.). Найдите все числа a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2-4ax+a^2-2a+2$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2$ равно 3.
113. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1980 г.). При каком значении a корни уравнения $2x^2+6x+a=0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<2$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Уравнения высших степеней

1. (МАТИ, 1980 г.). Решите уравнение $(x-\sqrt{3})^4-5(x-\sqrt{3})^2+4=0$.
2. (МГМИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения

$$\frac{(2|x|-3)^2-|x|-6}{4x+1}=0,$$

принадлежащие области определения функции $y=(2x+1)/(x^2-36)$.
3. (ПГУ, 1980 г.). Покажите, что если

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то $z^3+3bz-2a=0$.

Решите уравнения (4—9).
4. (МИФИ, 1980 г.). $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15$.
5. (КГУ, 1978 г.). $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=b^4$.
6. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{2x-2}{x^2-36}-\frac{x-2}{x^2-6x}=\frac{x-1}{x^2+6x}$.
7. (МАДИ, 1981 г.). $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.
8. (МТИЛП, 1981 г.). $\frac{x^2-3,5x+1,5}{x^2-x-6}=0$.
9. (МТИМБО, 1981 г.). $\frac{2x-3}{x-1}+1=\frac{6x-x^2-6}{x-1}$.

10*. (МАИ, 1979 г.). Найдите все действительные значения a, для каждого из которых уравнение $\sqrt{x-a}\,(x^2+(1+2a^2)\,x+2a^2)=0$ имеет только два различных корня. Запишите эти корни.

11. (МАИ, 1979 г.). Определите все значения $n\in N$, при которых уравнение $\frac{x-8}{n-10}=\frac{n}{x}$ не имеет решений.

12*. (БГУ, мехмат, 1979 г.). При каких значениях a уравнение $x^4+(1-2a)\,x^2+a^2-1=0$ а) не имеет решений? б) имеет одно решение? в) имеет два решения? г) имеет три решения?

13. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a сумма корней уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{-a^2+a+x}$ меньше чем $a^3/10$?

14. (МАИ, 1979 г.). Решите уравнение

$$\frac{2b^2+x^2}{b^3-x^3}-\frac{2x}{bx+b^2+x^2}+\frac{1}{x-b}=0.$$

При каких значениях b решение уравнения будет единственным?

15. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите все значения a, при которых неравенство $\frac{x-2a-3}{x-a+2}<0$ выполняется при всех x из промежутка $1\leqslant x\leqslant 2$.

16. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\frac{x-5}{x^2+5x-14}>0$.

17. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите целые x, удовлетворяющие неравенству $x^4-3x^3-x+3<0$.

Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству (18—22).

18. (МЭСИ, 1979 г.). $\frac{x-2}{x^2-9}<0$.

19. (МЭСИ, 1977 г.). $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}<\frac{1-2x}{x^3+1}$.

20. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{x+4}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}<\frac{4x}{3x-x^2}$.

21. (МЭСИ, 1980 г.). $\frac{4x+19}{x+5}<\frac{4x-17}{x-3}$.

22. (МЭСИ, 1977 г.). $(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2)<0$.

23. (ГГУ, мехмат, физфак, 1978 г.). Найдите целые x, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{2}{x-13}\right|>\frac{8}{9}$.

24. (МАТИ, 1979 г.). Назовем a «хорошим» числом, если для любого действительного x выполняется неравенство $\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\leqslant a$.

а) Докажите, что число 4 является «хорошим» числом.

б) Найдите все «хорошие» числа.

25. (МИЭТ, 1977 г.). При каких значениях m неравенство $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется при всех $x\in R$?

26*. (МГУ, геофизика, 1977 г.). Найдите все значения k, при которых неравенство $\frac{x^2+k^2}{k(6+x)} \geqslant 1$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

Рациональные неравенства

Решите следующие неравенства (27—135).

27. (МТИЛП, 1978 г.; МИНХ, 1979 г.). $(x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

28. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$.

29. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{2x-3}{3x-7} > 0$.

30. (МАДИ, 1977 г.). $\frac{0,5}{x-x^2-1} < 0$.

31. (ВЗФЭИ, 1980 г.). $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} < 0$.

32. (ВЗФЭИ, 1980 г.). $\frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0$.

33. (МТИЛП, 1980 г.). $\frac{(x-1)(x+2)^2}{-1-x} < 0$.

34. (МГИ, 1980 г.). $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0$.

35. (МИЭТ, 1977, г.). $x^4-5x^2+4 < 0$.

36. (МАТИ, 1980 г.). $x^4-2x^2-63 \leqslant 0$.

37. (МИИЗ, 1979 г.). $\frac{3}{x-2} < 1$.

38. (РПИ, 1979 г.). $\frac{1}{x-1} \leqslant 2$.

39. (РПИ, 1980 г.). $\frac{4x+3}{2x-5} < 6$.

40. (ЯГУ, 1980 г.). $\frac{5x-6}{x+6} < 1$.

41. (МИСИ, 1978 г.). $\frac{5x+8}{4-x} < 2$.

42. (МХТИ, 1977 г.). $\frac{x-1}{x+3} > 2$.

43. (РПИ, 1980 г.). $\frac{7x-5}{8x+3} > 4$.

44. (МАТИ, 1980 г.). $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$.

45. (МИИЗ, 1979 г.). $\frac{5x-1}{x^2+3} < 1$.

46. (МИИЗ, 1977 г.). $\frac{x-2}{x^2+1} < -\frac{1}{2}$.

47. (МИИЗ, 1977 г.). $\frac{x+1}{(x-1)^2} < 1$.

48. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $\frac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5} > 0$.

49. (МИХМ, 1980 г.). $\frac{x^2+6x-7}{x^2+1}\leqslant 2$.

50. (МТИЛП, 1979 г.). $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$.

51. (ВЗФЭИ, 1980 г.). $\frac{1+3x^2}{2x^2-21x+40}<0$.

52. (ВЗФЭИ, 1980 г.). $\frac{1+x^2}{x^2-5x+6}<0$.

53. (МТИЛП, 1979 г.). $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}>0$.

54. (ВЗИТиЛП, 1980 г.). $\frac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}>0$.

55. (ВЗИТиЛП, 1980 г.). $\frac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2}>0$.

56. (КПИ, фак. общетехн. дисц., 1979 г.). $\frac{2x^2-3x-459}{x^2+1}>1$.

57. (ЯГУ, 1980 г.). $\frac{x^2-1}{x^2+x+1}<1$.

58. (МХТИ, 1977 г.). $\frac{x}{x^2-3x-4}>0$.

59. (ВЗЭИС, 1977 г.). $\frac{x^2+7x+10}{x+2/3}>0$.

60. (МАТИ, 1980 г.). $\frac{3x^2-4x-6}{2x-5}<0$.

61. (ВЗЭИС, 1978 г.). $\frac{17-15x-2x^2}{x+3}<0$.

62. (МСИ, 1977 г.; ПГУ, 1980 г.). $\frac{x^2-9}{3x-x^2-24}<0$.

63. (МАДИ, 1977 г.). $\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}\geqslant 0$.

64. (МГИ, 1977 г.). $2x^2+\frac{1}{x}>0$.

65. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x}\geqslant 0$.

66. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0$.

67. (МАДИ, 1977 г.). $\frac{x^2-8x+7}{4x^2-4x+1}<0$.

68. (МАДИ, 1977 г.). $\frac{x^2-36}{x^2-9x+18}<0$.

69. (КишПИ, 1980 г.). $\frac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2}\geqslant 0$.

70. (МГИ, 1980 г.). $\frac{x-1}{x+1}<x$.

71. (МГИ, 1979 г.). $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$.

72. (МИИГАиК, 1977 г.). $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0$.

73. (МГИ, 1977 г.). $\frac{5x^2-2}{4x^2-x+3}<1$.

74. (РПИ, 1980 г.). $\frac{x^2-5x+12}{x^2-4x+5}>3$.

75. (РПИ, 1980 г.). $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}<4$.

76. (РПИ, 1980 г.). $\frac{x^2-1}{2x+5}<3$.

77. (РПИ, 1978 г.). $\frac{x^2+1}{4x-3}>2$.

78. (МТИПП, 1980 г.). $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$.

79. (МГИ, 1979 г.). $\frac{3x-5}{x^2+4x-5}>\frac{1}{2}$.

80. (МИНХ, 1977 г.). $\frac{2x+3}{x^2+x-12}\leqslant\frac{1}{2}$.

81. (РПИ, 1980 г.; БГУ, 1980 г.). $\frac{5-2x}{3x^2-2x-16}<1$.

82. (МФТИ, 1977 г.). $\frac{15-4x}{x^2-x-12}<4$.

83. (МИНХ, 1977 г.) $\frac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\frac{1}{2}$.

84. (МТИМБО, 1979 г.) $\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geqslant 0$.

85. (МФТИ, 1977, г.; МАИ, 1979 г.). $\frac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$.

86. (МФТИ, 1977 г.). $\frac{19-33x}{7x^2-11x+4}>2$.

87. (МАИ, 1979 г.). $\frac{0,5x+49}{10x^2+x-2}<\frac{1}{2}$.

88. (КишПИ, 1980 г.). $\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2}\geqslant 0$.

89. (МИИГАиК, 1977 г.). $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1$.

90. (РПИ, 1980 г.). $2+\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x}$.

91. (РПИ, 1980 г.). $1+\frac{2}{x-1}>\frac{6}{x}$.

92. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$.

93. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}<2$.

94. (МАИ, 1979 г.). $\frac{2(x-3)}{x(x-6)}\leqslant\frac{1}{x-1}$.

95. (МАИ, 1979 г.). $\frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)}\geqslant\frac{1}{x-2}$.

96. (МАИ, 1979 г.). $\frac{2x}{x^2-9}\leqslant\frac{1}{x+2}$.

97. (БГУ, 1980 г.). $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x}$.

98. (БГУ, 1980 г.). $\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1<0$.

99. (БГУ, 1980 г.). $\frac{20}{(x-3)(x-4)}+\frac{10}{x-4}+1>0$.

100. (МИИГАиК, 1977 г.). $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1$.

101. (МИИГАиК, 1977 г.). $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

102. (МИНХ, 1977 г.). $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5$.

103. (МИСиС, 1979 г.). $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5$.

104. (МИФИ, 1979 г.). $(x^2-2x)(2x-2)-9\frac{2x-2}{x^2-2x}\leqslant 0$.

105. (МИФИ, 1979 г.). $(x^2+3x)(2x+3)-16\frac{2x+3}{x^2+3x}\geqslant 0$.

106. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{x^2-2x+2|a|}{x^2-a^2}>0$.

107. (МИИГАиК, 1977 г.). $|x^3-1|\geqslant 1-x$.

108. (МТИПП, 1977 г.). $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

109. (МИХМ, 1979 г.). $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|}<0$.

110. (МИИЗ, 1977 г.). $\frac{|x-2|}{x-2}>0$.

111. (ЯГУ, 1980 г.). $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$.

112. (ЛГПИ, 1978 г.). $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2$.

113. (МАИ, 1977 г.). $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$.

114. (БГУ, 1980 г.). $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

115. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

116. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{|x-1|}{x+2}<1$.

117. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{|x+2|-x}{x}<2$.

118. (МАТИ, 1980 г.). $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

119. (МИИГАиК, 1978 г.). $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

120. (МИИГАиК, 1978 г.). $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

121. (КубГУ, 1980 г.). $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$.

122. (БГУ, 1980 г.). $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

123. (МГМИ, 1979 г.). $|x|<\frac{a}{x}$.

124. (БарнГПИ, матфак, 1981 г.). $1+\frac{12}{x^2}<\frac{7}{x}$.

125. (ТашГУ, матфак, 1981 г.). $x-17\geqslant\frac{60}{x}$.

126. (ТашГУ, физфак, 1981 г.). $\frac{x^2-4x+5}{x^2+5x+6}\geqslant 0$.

127. (ТашГУ, физфак, 1981 г.). $\frac{x+1}{x-1}\geqslant\frac{x+5}{x+1}$.

128. (МИСиС, 1981 г.). $x\leqslant\frac{6}{x-5}$.

129. (МГПИ, физфак, 1981 г.). $\frac{x-1}{x^2-x-12}\leqslant 0$.

130. (МГУ, химфак, 1981 г.). $\frac{30x-9}{x-2}\geqslant 25(x+2)$.

131. (УЭИИЖТ, 1981 г.). $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\leqslant 2$.

132. (МВИМУ, 1981 г.). $f'(x)\geqslant g'(x)$, если $f(x)=5-3x+\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}$, $g(x)=3x-7$.

133. (МВИМУ, 1982 г.). $f'(x)\geqslant g'(x)$, если $f(x)=10x^3-13x^2+7x$, $g(x)=11x^3-15x^2-3$.

134. (МИИВТ, 1982 г.). $\frac{4}{x+2}>3-x$.

135. (МИИВТ, 1982 г.). $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{x+2}$.

§ 6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

При решении иррациональных уравнений нужно учитывать следующую теорему.

При натуральном n уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=(\varphi(x))^{2n}, \\ \varphi(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

При решении иррациональных неравенств нужно учитывать следующие теоремы.

При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}<\varphi(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)<(\varphi(x))^{2n}, \\ f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$$

При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}>\varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x)\geqslant 0, \\ f(x)>(\varphi(x))^{2n}. \end{cases}$$

При натуральном n неравенство $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^{2n}. \end{cases}$$

При натуральном n неравенство $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} < 1$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^{2n}. \end{cases}$$

Решите следующие уравнения (1—118).

1. (МГУ, мехмат, 1980 г.). $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.
2. (МГУ, мехмат, 1980 г.). $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.
3. (МГУ, мехмат, 1980 г.). $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$.
4. (МГУ, мехмат, 1980 г.). $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$.
5. (МЭСИ, 1979 г.). $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.
6. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.
7. (ЛьвГУ, 1980 г.). $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.
8. (МАТИ, 1977 г.; ЛьвГУ, 1980 г.). $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.
9. (МВМИ, 1977 г.). $\frac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$.
10. (МФТИ, 1979 г.). $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.
11. (МФТИ, 1979 г.). $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1}+2\sqrt{x+1}=5$.
12. (МАТИ, 1979 г.). $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$.
13. (МТИ, 1978 г.). $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.
14. (БГУ, 1980 г.). $\sqrt{\log_2 x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=2$.
15. (МТИ, 1979 г.). $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2$.
16. (МАИ, 1977 г.). $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$.
17. (МЭСИ, 1977 г.). $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$.
18. (МИИГАиК, 1979 г.). $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}$.

19. (МВМИ, 1978 г.). $\sqrt{12-x}=x$.

20. (МИСиС, 1979 г.). $\sqrt{7-x}=x-1$.

21. (МИСИ, 1979 г.). $x-\sqrt{x+1}=5$.

22. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $21+\sqrt{2x-7}=x$.

23. (МВМИ, 1978 г.). $1-\sqrt{1+5x}=x$.

24. (МТИМБО, 1977 г.; МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $2\sqrt{x+5}=x+2$.

25. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $4\sqrt{x+6}=x+1$.

26. (МГУ, биофак, 1977 г.). $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

27. (МВМИ, 1978 г.). $\sqrt{37-x^2}+5=x$.

28. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

29. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.

30. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $\sqrt{5-x^2}=x-1$.

31. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $\sqrt{x^2+8}=2x+1$.

32. (МВМИ, 1977 г.). $4+\sqrt{26-x^2}=x$.

33. (МИСиС, 1978 г.). $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$.

34. (МАИ, 1979 г.). $\sqrt{6x-x^2-5}=2x-6$.

35. (МВМИ, 1978 г.). $\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1$.

36. (МВМИ, 1978 г.). $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x}=1$.

37. (МВМИ, 1977 г.). $\dfrac{\sqrt{13-x^2}}{x+1}=1$.

38. (МВМИ, 1977 г.). $\dfrac{2+\sqrt{19-2x}}{x}=1$.

39. (МГУ, эконом. фак., 1979 г.). $\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3$.

40. (МАТИ, 1980 г.). $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

41. (МАТИ, 1978 г.). $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.

42. (МИЭТ, 1980 г.). $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$.

43. (МАТИ, 1977 г.). $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$.

3 44. (МТИПП, 1977 г.). $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

45. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt[3]{16-x^3}=4-x$.

46. (МХТИ, 1977 г.). $\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$.

47. (МИРЭА, 1977 г.). $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

48. (МИРЭА, 1977 г.). $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$.

49. (МТИЛП, 1979 г.). $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

50. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

51. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$.

52. (МАТИ, 1980 г.). $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

53. (МИСИ, МПИ, 1979 г.). $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

54. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$.

55. (МФИ, 1979 г.). $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.

56. (МГИ, 1977 г.). $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

57. (МАДИ, 1977 г.). $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

58*. (МТИМБО, 1979 г.). $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=$
$=4-2x-x^2$.

59. (МАИ, 1979 г.). $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$.

60. (МИИЗ, 1978 г.). $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$.

61. (МАТИ, 1979 г.). $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$.

62. (МИИГАиК, 1980 г.). $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3}=1$.

63. (МАИ, 1977 г.). $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$.

64. (МГИ, 1977 г.). $\sqrt{3x-7}-\sqrt{x+1}=2$.

65. (БГУ, 1979 г.; КишПИ, 1980 г.). $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

66. (РПИ, 1979 г.). $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$.

67. (РПИ, 1979 г.). $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$.

68. (БГУ, 1980 г.). $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

69*. (МТИМБО, 1977 г.) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$.

70. (МИИГАиК, 1980 г.). $\dfrac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)}=1$.

71. (МХТИ, 1977 г.). $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

72. (МИНГП, 1979 г.). $\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$.

73. (МАДИ, 1978 г.). $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

74. (БГУ, 1980 г.). $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

75. (ЯГУ, 1980 г.). $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

76. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

77. (МИРЭА; ЛатвГУ, 1980 г.). $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

78. (МАИ, 1979 г.). $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$.

79. (МАИ, 1979 г.). $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$.

80. (РПИ, 1980 г.). $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$.

81. (ЛатвГУ, 1980 г.). $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-7}=2\sqrt{x}$.

82. (ХАИ, 1980 г.). $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

83. (МТИ, 1977 г.). $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{9-x}$.

84. (БГУ, 1980 г.). $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

85. (РПИ, 1980 г.). $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

86. (РПИ, 1980 г.). $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$.

87. (МИЭТ, 1980 г.). $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

88. (МИЭТ, 1977 г.). $\sqrt{x+3}-1=\sqrt{x-\sqrt{x-2}}$.

89. (КГУ, 1978 г.). $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$.

90. (МАДИ, 1979 г.). $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

91. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

92. (МИРЭА, 1978 г.). $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

93. (ГГУ, 1979 г.). $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

94. (МАИ, 1977 г.). $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$.

95. (МИЭТ, 1977 г.). $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$.

96. (МИФИ, 1980 г.). $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$.

97. (МИФИ, 1980 г.). $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$.

98. (МИЭТ, 1980 г.). $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

99. (МТИ, 1978 г.). $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

100*. (МИФИ, 1978 г.). $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

101. (КГУ, ВМК; МАТИ, 1980 г.). $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+$

$+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2+x}}=2\sqrt{2}$.

102*. (МИФИ, 1977 г.). $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$.

103*. (МИФИ, 1977 г.). $x^2-\sqrt{a-x}=a$.

104. (ГГУ, 1978 г.). $a\sqrt{x}-\sqrt{x+2ax\sqrt{x^2+7a^2}}=0$.

105. (МИФИ, 1980 г.). $x^2-4x+32=16\sqrt{x}$.

106. (БГУ, фак. прикладной матем., 1979 г.). $(a-2)/\sqrt{x+4}=1$.

107. (ГГУ, мехмат, физфак, 1978 г.). $\sqrt{\frac{20+x}{x}}-\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

108. (ТашГУ, 1981 г.). $\sqrt{\frac{2x}{x+1}}-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x}}=1$.

109. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$.

110. (МФТИ, 1981 г.). $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{5}{2}$.

111. (РИИГА, 1981 г.). $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+$ $+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

112. (МТИПП, 1981 г.). $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$.

113. (МЭИС, 1981 г.). $\left(\dfrac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{10}{13}\sqrt[5]{x\sqrt{x^{11}}}\right)'=56$.

114. (МАДИ, 1981 г.). $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}-12=0$.

115. (МАДИ, 1981 г.). $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$.

116. (МТИЛП, 1981 г.). $x-1=\sqrt{x/2}$.

117. (МАИ, 1981 г.). $\sqrt{x^2+8}=2x+1$.

118. (РГУ, физфак, 1977 г.). $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}-2\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{7}{3}$.

119*. (ЛГУ, 1980 г.). Сколько корней имеет уравнение (найдите их) $\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5/3}}=x$.

120. (МИСиС, 1979 г.). Найдите корни уравнения $\sqrt[10]{512}\sqrt{15x-21}-\sqrt{13}\sqrt[5]{15-6x}=0$, представимые несократимой дробью $a/6$, где a — целое число.

Решите следующие неравенства (121—212).

121. (ГГУ, 1979 г.; МИИГАиК, 1980 г.). $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$.

122. (МИФИ, 1980 г.). $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$.

123. (МГМИ, 1979 г.) $\sqrt{(x-2)/(1-2x)}>-1$.

124. (МИЭТ, 1977 г.). $\sqrt{(3x-1)/(2-x)}>1$.

125. (МВТУ, 1977 г.). $(\sqrt{x}-3)/(x-2)>0$.

126. (КишПИ, 1980 г.). $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$.

127. (МТИ, 1977 г.). $\sqrt{x^2+2x-3}<1$.

128. (МИХМ, 1977 г.). $\sqrt{1-\dfrac{x+2}{x^2}}<\dfrac{2}{3}$.

129. (МГМИ, 1980 г.). $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

130. (МИХМ, 1977 г.). $\sqrt{2x^2+15x-17}/(10-x)\geqslant 0$.

131. (МВТУ, 1977 г.; МАДИ, 1977 г.). $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leqslant 0$.

132. (ЯГУ, 1980 г.). $\sqrt{x^2}<x+1$.

133. (МТИЛП, 1977 г.; ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.). $2\sqrt{x-1}<x$.

134. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{x+18}<2-x$.

135. (МИИГАиК, 1978 г.). $x>\sqrt{24-5x}$.

136. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt{9x-20} < x$.

137. (МГИ, 1979 г.). $\sqrt{x+7} < x$.

138. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{2x-1} < x-2$.

139. (КГУ, 1979 г.). $\sqrt{x+78} < x+6$.

140. (МИЭТ, 1979 г.). $\sqrt{5-2x} < 6x-1$.

141. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt{x+61} < x+5$.

142. (МИТХТ, 1977 г.). $\sqrt{(x-6)(1-x)} < 3+2x$.

143. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$.

144. (КГУ, 1979 г.). $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

145. (КГУ, 1979 г.). $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$.

146. (МАИ, 1977 г.). $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

147. (МФТИ, 1977 г.). $x+4 > 2\sqrt{4-x^2}$.

148. (КишПИ, 1980 г.). $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

149. (МФТИ, 1977 г.). $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$.

150. (МФТИ, 1977 г.). $x+4 > 2\sqrt{4-x^2}$.

151. (МИЭТ; МФТИ, 1977 г.). $1-\sqrt{13+3x^2} > 2x$.

152. (МИФИ, 1980 г.). $x < \sqrt{2-x}$.

153. (КГУ, 1978 г.). $x+3 < \sqrt{x+33}$.

154. (МТИЛП, 1980 г.). $\sqrt{x^2-1} > x$.

155. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{2x+14} > x+3$.

156. (МАТИ, 1978 г.). $x-3 < \sqrt{x-2}$.

157. (КГУ, 1979 г.). $x+2 < \sqrt{x+14}$.

158. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.; МВТУ, 1978 г.). $x-1 < \sqrt{7-x}$.

159. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt{9x-20} > x$.

160. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{11-5x} > x-1$.

161. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{x+2} > x$.

162. (МФИ, 1979 г.). $\sqrt{x^2+1} > x-1$.

163. (МТИЛП, 1977 г.). $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

164. (МТИЛП, 1977 г.). $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$.

165. (КГУ, 1979 г.). $1-x < \sqrt{x^2-2x}$.

166. (МИЭТ, 1977 г.). $\sqrt{5-x^2} > x-1$.

167. (МТИЛП, 1980 г.). $x-\sqrt{1-|x|} < 0$.

168. (КГУ, 1980 г.). $4-x < \sqrt{x^2-2x}$.

169. (КГУ, 1979 г.). $x < \sqrt{x^2+x-2}$.

170. (КГУ, 1979 г.). $4-x < \sqrt{2x-x^2}$.

171. (КГУ, РФФ, 1979 г.). $x-3<\sqrt{x^2+4x-5}$.

172. (МАИ, 1979 г.). $2x+3<\sqrt{x^2+5x+6}$.

173. (МАИ, 1979 г.). $\sqrt{x^2-3x+2}>2x-5$.

174. (МГУ, биофак, 1980 г.). $\sqrt{x^2+x}>1-2x$.

175. (МГУ, биофак, 1980 г.). $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$.

176. (МГУ, биофак, 1980 г.). $2x+3<\sqrt{-2-3x-x^2}$.

177. (МГУ, биофак, 1980 г.). $x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}$.

178. (МГУ, биофак, 1980 г.). $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

179. (МИХМ, 1977 г.; БГУ, 1980 г.). $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

180. (КГУ, 1978 г.; МИФИ, 1979 г.). $x^2\geqslant x(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

181. (ЛГУ, 1979 г.). $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$.

182. (МИСиС, 1978 г.). $\sqrt{x}-3\leqslant 2/(\sqrt{x}-2)$.

183. (АзГПИ, физфак, 1979 г.). $x-3\sqrt{x-3}-1>0$.

184. (МИФИ, 1979 г.). $\sqrt{a+4}/(1-a)-1<0$.

185. (РПИ, 1978 г.). $\sqrt{2x-1}/(x-2)<1$.

186. (МИХМ, 1977 г.). $\sqrt{x+20}/x-1<0$.

187. (МФТИ, 1978 г.). $\sqrt{2x^2+7x-4}/(x+4)<1/2$.

188. (МИФИ, 1979 г.). $(1-\sqrt{21-4x-x^2})/(x+1)\geqslant 0$.

189. (ВильнГУ, физфак, 1979 г.). $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

190. (МФТИ, 1977 г.). $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$.

191. (МИФИ, 1979 г.). $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

192. (МИФИ, 1979 г.). $3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1$.

193. (ЛГУ, 1979 г.). $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+15}<6$.

194. (МФТИ, 1977 г.). $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$.

195. (МИУ, 1979 г.). $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$.

196. (МИФИ, 1979 г.). $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geqslant 1$.

197. (ЛГУ, 1977 г.). $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$.

198. (ВильнГУ, матфак, 1979 г.). $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

199. (МИУ, 1978 г.). $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

200. (МИЭТ, 1979 г.). $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>3/2$.

201. (КГУ, 1979 г.). $\sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$.

202. (МИФИ, 1980 г.). $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

203. (ЛГУ, матмех, 1979 г.). $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$.

204. (МИФИ, 1980 г.). $a\sqrt{x+1}<1$.

205. (МИФИ, 1980 г.). $(a+1)\sqrt{2-x}<1$.

206. (НГУ, фак. геолого-географ. и естеств. наук, 1981 г.). $\frac{2}{x}+3\leqslant\sqrt{41-\frac{16}{x}}$.

207. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

208. (ЕГУ, мехмат, 1981 г.). $\sqrt{-x^2+x+2}+2x+1>0$.

209. (МГУ, мехмат, 1981 г.). $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geqslant 0$.

210. (КубГУ, 1980 г.). $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}\geqslant 0$.

211. (ТаджГУ, физфак, 1981 г.). $(1/3)^{\sqrt{x+2}}<3^{-x}$.

212*. (МИФИ, 1980 г.). $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$.

213. (МАДИ, 1981 г.). Найдите середину отрезка, в котором выполнено неравенство $2x^2-7(\sqrt{x})^2\leqslant 4$.

214. (МТИЛП, 1981 г.). Найдите наименьшее целое положительное значение x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2+16x+64}>20$.

215. (МЭСИ, 1977 г.). Найдите целое число, удовлетворяющее неравенству $2\sqrt{2x+1}>3\sqrt{-x^2-x+6}$.

§ 7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите следуюшие системы уравнений (1—77).

1. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} y+x-1=0, \\ |y|-x-1=0. \end{cases}$

2. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} x+3|y|-1=0, \\ x+y+3=0. \end{cases}$

3. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} y-2x+1=0, \\ y-|x|-1=0. \end{cases}$

4. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} |x-1|+y=0, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

5. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} x+2y-6=0, \\ |x-3|-y=0. \end{cases}$

6. (МГУ, психфак, 1980 г.). $\begin{cases} u+v=2, \\ |3u-v|=1. \end{cases}$

7. (МГУ, психфак, 1980 г.). $\begin{cases} u+2v=2, \\ |2u-3v|=1. \end{cases}$

8. (МАТИ, 1979 г.). $\begin{cases} |x|+2|y|=3, \\ 5y+7x=2. \end{cases}$

9. (МАТИ, 1979 г.). $\begin{cases} |x-y|=12y-11, \\ y+1=2x. \end{cases}$

10. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

11. (ВЗПИ, 1978 г.). $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+4z=1, \\ -x+6y+z=5. \end{cases}$

12. (МАМИ, 1979 г.). $\begin{cases} 2x+3y-z=6, \\ x-y+7z=8, \\ 3x-y+2z=7. \end{cases}$

13. (АЗГПИ, физфак, 1979 г.). $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7. \end{cases}$

14. (СимфГУ, матфак, 1982 г). $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

15. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} xy+4=0, \\ x+y=3. \end{cases}$

16. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x+y=8. \end{cases}$

17. (МГИ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1. \end{cases}$

18. (МИРЭА, 1977 г.). $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9. \end{cases}$

19. (МИИГАиК, 1980 г.). $\begin{cases} x+y=7, \\ y=6/x. \end{cases}$

20. (МИРЭА, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

21. (МАМИ, 1978 г.; БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

22. (КПИ, 1977 г.). $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

23. (РПИ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=5. \end{cases}$

24. (МЭСИ, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-4}-\dfrac{x-1}{y+4}+\dfrac{16}{y^2-16}=0, \\ 11x-3y=1. \end{cases}$

25. (МЭСИ, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1}-\dfrac{x-y}{2y}=2, \\ x-y=4. \end{cases}$

26. (МАДИ, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}, \\ xy=5. \end{cases}$

27. (НГУ, фак. геолого-геофиз. и естеств. наук, 1979 г.).

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5, \\ xy=2. \end{cases}$$

28. (МАДИ, 1980 г.) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

29. (МТИЛП, 1980 г.; МАДИ, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

30. (МГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+y=-5, \\ \dfrac{y}{2x-y}=6. \end{cases}$

31. (МГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y}+x=3, \\ \dfrac{x}{2x+y}=-4. \end{cases}$

32. (МГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}+y=2, \\ \dfrac{y}{x+2y}=-3. \end{cases}$

33. (МГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x=1, \\ \dfrac{x}{x-y}=-2. \end{cases}$

34. (МАДИ, 1977 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

35. (МАТИ, 1977 г.). $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

36. (МИХМ, 1977 г.). $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

37. (КПИ, 1978 г.). $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

38. (РПИ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$

39. (БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+y^2=68, \\ xy=16. \end{cases}$

40. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} x(x+y)=9, \\ y(x+y)=16. \end{cases}$

41. (МИЭТ, 1977 г.; ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

42. (МХТИ, 1977 г.). $\begin{cases} y^2+xy=231, \\ x^2+xy=210. \end{cases}$

43. (МИРЭА, 1977 г.; БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12. \end{cases}$

44. (БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

45. (МАДИ, 1980 г.). $\begin{cases} x^2+y^2=25-2xy, \\ y(x+y)=10. \end{cases}$

46. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ 15xy+5(x+y)=-175. \end{cases}$

47. (МАДИ, 1977 г.; МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ 3xy+x+y=-35. \end{cases}$

48. (МАДИ, 1980 г.). $\begin{cases} 4x^2+y^2-2xy=7, \\ (2x-y)\,y=y. \end{cases}$

49. (МАТИ, 1977 г.). $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

50. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2+y^2=160. \end{cases}$

51. (МФТИ, 1977 г.). $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16, \end{cases}$

52. (МФТИ, 1977 г.). $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

53. (НГУ, фак. геолого-геофиз. и естеств. наук, 1978 г.).

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ 2(x+y)^2-y^2=14. \end{cases}$$

54. (МАДИ, 1977 г.). $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13, \\ x+y-\sqrt{xy}=3. \end{cases}$

55. (МЭСИ, 1980 г.). $\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0, \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0. \end{cases}$

56. (МГУ, эконом. фак., 1980 г.). $\begin{cases} xy+3y^2-x+4y-7=0, \\ 2xy+y^2-2x-2y+1=0. \end{cases}$

57. (МГУ, эконом. фак., 1980 г.). $\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0, \\ xy+3y^2-2x-14y+16=0. \end{cases}$

58. (МГУ, эконом. фак., 1980 г.). $\begin{cases} 3x^2+xy-2x+y-5=0, \\ 2x^2-xy-3x-y-5=0. \end{cases}$

59. (КГУ, мехмат, 1979 г.). $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

60. (МТИПП, 1977 г.). $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

61. (РПИ, 1978 г.). $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

62. (МИСиС, 1977 г.). $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12. \end{cases}$

63. (МАДИ, 1977 г.; БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3. \end{cases}$

64. (ЛатвГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

65. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} (x^2+y^2)\,xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$

66. (МФТИ, 1977 г.). $\begin{cases} 3xy-x^2-y^2=5, \\ 7x^2y^2-x^4-y^4=155. \end{cases}$

67. (МИЭТ, 1977 г.). $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$

68. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1, \\ \dfrac{xz}{x+z}=2, \\ \dfrac{yz}{y+z}=3. \end{cases}$

69. (МГУ, мехмат, 1977 г.). $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$

70. (МГУ, мехмат, 1977 г.). $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$

71. (МГУ, мехмат, 1977 г.). $\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0, \\ z^3-6y^2+12y-8=0, \\ x^3-6z^2+12z-8=0. \end{cases}$

72. (МИСиС, 1981 г.). $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 5x+4y=3. \end{cases}$

73. (КолПИ, отд. физики и механики, 1981 г.).

$$\begin{cases} 4x-y+4z=0, \\ x+5y-2z=3, \\ -x+8y-2z=1. \end{cases}$$

74. (МГУ, географ. фак., 1981 г.). $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

75. (МФТИ, 1981 г.). $\begin{cases} 6x+y^2-z^2=6, \\ x^2-y-4z=-4, \\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2. \end{cases}$

76. (МИЭМ, 1981 г.). $\begin{cases} x^2=(x-a)\,y, \\ y^2-xy=9ax. \end{cases}$

77. (ТаджГУ, планово-эконом. фак., 1981 г.).

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6, \\ x-2y=3. \end{cases}$$

78. (МАИ, 1979 г.). Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+2(a-1)\,y=a-4, \\ 2|x+1|+ay=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

79*. (МАИ, 1979 г.) Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+(a-1)\,y=2+4a, \\ 3|x|+2y=a-5 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

При каких значениях a следующие системы уравнений имеют решения? Найдите эти решения (80—83).

80. (ОГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a. \end{cases}$

81. (ОГУ, 1980 г.). $\begin{cases} (a+1)\,x-y=a+1, \\ x+(a-1)\,y=2. \end{cases}$

82. (МИФИ, 1980 г.). $\begin{cases} ax+y=a, \\ x+ay=a^2. \end{cases}$

83. (МИФИ, 1980 г.). $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=a^2. \end{cases}$

При каких значениях a каждая из следующих систем уравнений имеет бесчисленное множество решений? (84—85).

84. (МЭСИ, 1980 г.). $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3. \end{cases}$

85. (МЭСИ, 1980 г.). $\begin{cases} (a-2)\,x+27y=4{,}5, \\ 2x+(a+1)\,y\ \ =-1. \end{cases}$

86. (МАМИ, 1979 г.). При каком значении a сумма квадратов чисел, составляющих решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-y=2-a, \\ x+2y=a+1, \end{cases}$$

будет наименьшей?

Решите и исследуйте относительно a следующие системы уравнений (87—90).

87. (МИРЭА, 1978 г.). $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ x-y=2, \\ x+4y=a. \end{cases}$

88. (МИФИ, 1979 г.). $\begin{cases} 2\sqrt{x}-2\arccos y+z=1, \\ 5\sqrt{x}+\arccos y+z=6a-14, \\ \sqrt{x}+\arccos y+2z=2a+1. \end{cases}$

89. (МИФИ, 1979 г.). $\begin{cases} 3\cdot 2^x+2y-3\arcsin z=7, \\ 2^x-y-\arcsin z=-6, \\ 5\cdot 2^x-y+\arcsin z=6a+2. \end{cases}$

90. (МИФИ, 1979 г.). $\begin{cases} 2\sqrt{\operatorname{tg} x}+2y^2+z=14, \\ 3\sqrt{\operatorname{tg} x}-y^2+2z=20-4a, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x}+y^2+z=10. \end{cases}$

При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что каждая из нижеследующих систем имеет хотя бы одно решение? (91—94).

91*. (НГУ, 1980 г.). $\begin{cases} 2x+by=ac^2+c, \\ bx+2y=c-1. \end{cases}$

92.* (НГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x+by=ac^2+c, \\ bx+2y=c-1. \end{cases}$

93*. (НГУ, 1980 г.). $\begin{cases} 2x+by=c^2, \\ bx+2y=ac-1. \end{cases}$

94*. (НГУ, 1980 г.). $\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ x+by=ac+1. \end{cases}$

95. (ВильнГУ, 1980 г.). При каких значениях k все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям: $x>1$, $y>0$?

96. (ЛьвГУ, 1980 г.). Найдите все значения b, для которых x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=5b, \\ 4x+y=3b^2-10b, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x-y>3$.

97. (МАИ, 1977 г.). При каких действительных значениях n решения системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y=n, \\ 2nx-9y=-2 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $x>1/2n$, $y>0$?

98. (КПИ, 1977 г.). При каких значениях a числа 1 и a заключены между числами x_0 и y_0, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+y-1=2a, \\ 2xy=a^2-a? \end{cases}$$

99. (МАТИ, 1977 г.). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{9a}{y}-\dfrac{72a}{x}=\dfrac{a-12}{a-6}, \\ 9x+6ay=a^2y; \end{cases}$$

установите, при каких значениях a все решения $(x;\ y)$ удовлетворяют неравенству $x+y>0$.

100. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

101. (МГПИ, матфак, 1979 г.). Назовем матрицей таблицу вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — действительные числа. Если

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix},$$

то $A=B$ означает, что $a=l$, $b=m$, $c=n$, $d=p$. Произведением $A \cdot B$ матриц A и B назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} al+bn & am+bp \\ cl+dn & cm+dp \end{pmatrix}.$$

а) Найдите произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Системы иррациональных уравнений

Решите следующие системы уравнений (**102—120**).

102. (МОПИ, 1979 г.). $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, \\ x^2+y^2=136. \end{cases}$

103. (МАТИ, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ x+y=5. \end{cases}$

104. (ЛГУ, физфак, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=2. \end{cases}$

105. (МАТИ, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ x^2+y^2=15. \end{cases}$

106. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}, \\ x+y+xy=9. \end{cases}$

107. (МЭСИ, 1979 г.). $\begin{cases} \sqrt{x^2}+y=5, \\ y^2-x=7. \end{cases}$

108. (МЭИ, 1978 г.). $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}-\frac{3y}{x}}=16, \\ \sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{12}-\sqrt{8}. \end{cases}$

109. (ВГУ, 1980 г.). $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$

110. (ПГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x+y=9, \\ x^{1/3}+y^{1/3}=3. \end{cases}$

111. (КишПИ, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$

112. (КПИ, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10. \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

113. (МИУ, 1978 г). $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

114. (МАДИ, 1977 г.). $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

115. (МИСИ, 1978 г.). $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

116. (ЛГУ, 1979 г.; МАДИ, 1980 г.). $\begin{cases} x\sqrt{(x+y)^2}=3x, \\ x\left(\sqrt{(x-y)^2}-1\right)^2=0. \end{cases}$

117. (ЛГУ, 1979 г.). $\begin{cases} (x-y)+\sqrt{\dfrac{x-y}{2(x+y)}}=\dfrac{10}{x+y}, \\ x^2+y^2=17. \end{cases}$

118. (МЭИС, 1981 г.). $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

119. (МФТИ, 1981 г.). $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2. \end{cases}$

120. (МГУ, психфак, 1981 г.). $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$

121. (КГУ, эконом. фак., 1981 г.). При каких значениях a кривые $y=1+\dfrac{x^2}{a^2}$ и $y=4\sqrt{x}$ имеют только одну общую точку?

Системы неравенств с одним неизвестным

122. (МСИ, 1977 г.). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2(3x-1)<3(4x+1)+16, \\ 4(2+x)<3x+8. \end{cases}$$

123. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 0{,}5(2x-5)>\dfrac{2-x}{2}+1, \\ 0{,}2(3x-2)+3>\dfrac{4x}{3}-0{,}5(x-1). \end{cases}$$

124. (МЭСИ, 1980 г.). Найдите натуральные x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x+3<4+2x, \\ 5x-3<4x-1. \end{cases}$$

125. (МЭСИ, 1980 г.). Укажите целую часть чисел x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{6}<2-\dfrac{x+5}{2}, \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4}. \end{cases}$$

126. (ВГУ, физфак, 1977 г.). Найдите все значения a, для которых уравнение

$$\cos x = \frac{a-1{,}5}{2-0{,}5a}$$

имеет решения.

127. (КПИ, 1977 г.). Найдите все значения α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+\alpha \leqslant 0, \\ x^2-4x-6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

128*. (ЛГУ, физфак, 1979 г.). При каких $a<0$ неравенства $2\sqrt{ax} < 3a - x$ и $x - \sqrt{x/a} > 6/a$ имеют общие решения?

129. (МГУ, геофизика, 1977 г.). Найдите все значения k, при которых существует хотя бы одно общее решение неравенств $x^2+4kx+3k^2 > 1+2k$ и $x^2+2kx \leqslant 3k^2-8k+4$.

130. (МГУ, геофизика, 1977 г.). Найдите все значения k, при которых каждое решение неравенства $x^2+3k^2-1 \geqslant 2k(2x-1)$ является решением неравенства $x^2-(2x-1)k+k^2 \geqslant 0$.

Решите следующие двойные неравенства (131—133).

131. (МПИ, 1979 г.). $0 < \frac{3x-1}{2x+5} < 1$.

132. (МИНХ, 1977 г.). $1 \leqslant \frac{2-x}{x+1} \leqslant 2$.

133. (МИСиС, 1979 г.). $1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2$.

Решите следующие системы неравенств (134—141).

134. (МИНХ, 1979 г.) $\begin{cases} x^2-x-6 \geqslant 0, \\ x^2-4x < 0. \end{cases}$

135. (ЯГУ, 1980 г.) $\begin{cases} x^2-4 < 0, \\ x+1 > 0, \\ \frac{1}{2} - x > 0. \end{cases}$

136. (МАИ, 1979 г.). $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{3} \leqslant \frac{4}{x}, \\ \frac{1}{x} > -1, \\ x^2+3x+1 > 0. \end{cases}$

137. (МАИ, 1979 г.). $\begin{cases} \frac{1}{3x} < 1, \\ x + \frac{4}{3} \geqslant \frac{4}{3x}, \\ 9x^2-9x+1 < 0. \end{cases}$

138. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} |x| \geqslant 1, \\ |x-1| < 3. \end{cases}$

139. (БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} |x^2-4x|<5, \\ |x+1|<3. \end{cases}$

140. (БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} |x^2+5x|<6, \\ |x+1|\leqslant 1. \end{cases}$

141. (БГУ, 1980 г.). $\begin{cases} |x^2+5x|<6, \\ |x+1|<2. \end{cases}$

Системы неравенств с двумя неизвестными

142. (МИЭМ, 1977 г.). Дана система неравенств

$$\begin{cases} 2x-y>a, \\ 3x+2y>3a. \end{cases}$$

а) При $a=0$ указать хотя бы одно решение системы.

б) Верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $5x+y>4a$?

в) Верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $x+3y>2a$?

143. (ЛГУ, физфак, 1979 г.). При каком $a \in R$ точка $(a;\ a^2)$ расположена внутри треугольника, ограниченного прямыми $y=x+1$, $y=3-x$, $y=-2x$?

144. (МГУ, мехмат, 1978 г.). Найдите все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant(1-a)/(a+1), \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение.

145. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x|+|y|=1$.

На координатной плоскости xOy штриховкой отметьте множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам с двумя переменными x и y (границу, принадлежащую найденному множеству, изобразите сплошной линией, а не принадлежащую множеству — штриховой) (146—185).

146. (МИНХ, 1979 г.). $x^2-x<y-xy$.

147. (ЯГУ, 1980 г.). $|xy|<1$.

148. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|y|+\frac{1}{2}\leqslant e^{-|x|}$.

149. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y)$.

150. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|y|+2|x|\leqslant x^2+1$.

151. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$.

152. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$.

153. (ЯГУ, 1980 г.). $\frac{y-|x|}{xy^2}\geqslant 0$.

154. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $\frac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x}\leqslant 0.$

155. (МИНХ, 1979 г.). $x+y-2\leqslant 0,\ 2y+5x\geqslant 10,\ 5x-2y-10\leqslant 0.$

156. (МСИ, 1977 г.). $3x+2y+1\geqslant 0,\ 3x+2y-3\leqslant 0.$

157. (ЯГУ, 1980 г.). $x+y\leqslant 1,\ -x-y\leqslant 1.$

158. (ВЗИТиЛП, 1980 г.). $x-y\leqslant 1,\ x+y\leqslant 2,\ y\leqslant 2.$

159. (МИНХ, 1979 г.). $2y-x\leqslant 6,\ 9x+4y\leqslant 56,\ 3x+5y\geqslant 4.$

160. $x-3y+13\leqslant 0,\ y+5\leqslant 5x,\ 4y+28\geqslant 7x.$

161. (КГУ, ВМК, 1977 г.). $\log_{1/3}(2x+y-2)>\log_{1/3}(y+1),$ $\sqrt{y-2x-3}<\sqrt{3-2x}.$

162. (КГУ, ВМК, 1977 г.). $\log_{1/2}(x+y-1)>\log_{1/2}y,$ $\sqrt{y-x-1}<\sqrt{2-x}.$

163. (МСИ, 1977 г.). $x^2+y^2\geqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 16.$

164. (ЯГУ, 1980 г.). $x^2+y^2\leqslant 9,\ x+y\geqslant 0.$

165. (МИНХ, 1979 г.). $y^2\leqslant 4-x^2,\ 3x+2y-3\leqslant 0.$

166. (МСИ, 1977 г.). $x^2-4x-y+3\leqslant 0,\ 2x-y-2\geqslant 0.$

167. (МАТИ, 1979 г.). $y\geqslant x^2-2x-3,\ y<x+1.$

168. (КГУ, эконом. фак., 1977 г.). $y\geqslant\sqrt{1-x^2},\ y+|x|\leqslant 4.$

169. (МИНХ, 1979 г.). $2y-x^2<0,\ x^2-y^2\geqslant 0.$

170. (МТИПП, 1977; МГИ, 1977 г.). $y\geqslant x^2,\ y\leqslant 4-x^2.$

171. (МИНХ, 1979 г.). $y\geqslant x^2-4x+3,\ y<x^2+4x+3.$

172. (МАТИ, 1979 г.). $2y\geqslant x^2,\ y\leqslant -2x^2+3x.$

173. (МИНХ, 1979 г.). $y-|\log_2 x|>0,\ y-2\geqslant 0.$

174. (САДИ, 1977 г.). $y\leqslant\log_2 x,\ 4x-3y-12\leqslant 0.$

175. (МФТИ, 1977 г.). $\sqrt{x^2-3y^2+4x+4}\leqslant 2x+1,\ x^2+y^2\leqslant 4.$

176. (МФТИ, 1977 г.). $\sqrt{3x^2+3y^2-3}\geqslant 2y+1,\ y+4\geqslant 2\sqrt{3}|x|.$

177. (МТИ, 1977 г.). $\sqrt{x+y}\geqslant x,\ y\leqslant 2.$

178. (МТИММП, 1977 г.). $y+x^2\leqslant 0,\ y-2x+3\geqslant 0,\ y+1\leqslant 0.$

179. (МЭИ, 1978 г.). $2x+y^2\leqslant 0,\ x+2\geqslant 0,\ y^2-1\leqslant 0.$

180. (ЯГУ, 1980 г.). $xy\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0,\ y-x\leqslant 0.$

181. (МИНХ, 1980 г.). $x^2+y^2-4\leqslant 0,\ y-x^2+3<0,\ x\geqslant 0.$

182. (МИФИ, 1980 г.). $x^2+y^2\leqslant 9,\ y\geqslant x^2-3,\ |x|\leqslant 1.$

183. (КГУ, ВМК, 1977 г.). $\log_2(2y-x^2+1)>\log_2 y,$ $\sqrt{y-2x+4}<\sqrt{8-x}.$

184. (КГУ, ВМК, 1977 г.). $|x|+|y|<4,\ \log_2(2y-x^2+4)>$ $>\log_2(y+1).$

185. (МИФИ, 1980 г.). $|x+y|+|x-y|\leqslant 4,\ |x|\leqslant 1,$ $y\geqslant\sqrt{x^2-2x+1}.$

§ 8. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Числовой *функцией* f называется отображение подмножества D множества $\boldsymbol{R}$ на подмножество E множества $\boldsymbol{R}$. Множество D называется *областью определения*, а E — *множеством значений* функции f. Область определения функции f обозначается $D(f)$, а множество значений — $E(f)$. Значение f в точке x обозначают $f(x)$. Число из $D(f)$ обычно обозначают буквой, например x, и называют *независимой переменной* или *аргументом*. Значение функции обычно также обозначают буквой, например y. Каждому значению независимой переменной x из области определения $D(f)$ функции f соответствует определенное значение $y=f(x)$ зависимой переменной y из множества $E(f)$ функции f.

Пример 1. Областью определения функции $y=\sqrt{4-x^2}$ является множество $D=[-2;\ 2]$, а множеством значений — множество $E=[0;\ 2]$.

Пример 2. Область определения функции $y=\arccos(2-x)$ является множество $D=[1;\ 3]$, т. е. такое множество значений x, на котором $-1\leqslant 2-x\leqslant 1$, а множеством значений — множество $E=[0;\ \pi]$.

Пример 3. Областью определения функции $y=\sqrt{x(2-x)}\times\times\lg(x-1)$ является множество $D=]1;\ 2]$, т. е. наибольшее множество, на котором определены как функция $\sqrt{x(2-x)}$, так и функция $\lg(x-1)$.

Пример 4. Областью определения функции $y=4\sin x-3\cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$, а множеством значений — множество $E=[-5;\ 5]$. В самом деле, положив $\sin\alpha=3/5$, $\cos\alpha=4/5$, где $\alpha=\operatorname{arctg}(3/4)$, преобразуем данную функцию к виду

$$y=5\left(\frac{4}{5}\sin x-\frac{3}{5}\cos x\right)=5\sin(x-\alpha),$$

т. е. $y=5\sin(x-\operatorname{arctg}(3/4))$, а эта функция принимает все значения из $[-5;\ 5]$.

Найдите области определения следующих функций (1—112).

1. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{2x-x^2}$.
2. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$.
3. (МТИ, 1978 г.). $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$.
4. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{x^2-5x+6}$.
5. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}}$.
6. (МИИГАиК, 1977 г.). $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}$.
7. (МИИГАиК, 1977 г.). $y=\sqrt{-4x^2+4x+3}$.
8. (КГУ, 1979 г.). $y=\sqrt{6+7x-3x^2}$.
9. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2+x}$.

10. (МСИ, 1980 г.). $y=\sqrt{\dfrac{1}{2x^2-5x-3}}$.

11. (РПИ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{4x-x^3}$.

12. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$.

13. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\dfrac{1}{x^3+x-2}$.

14. (РПИ, 1980 г.). $y=\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+4}$.

15. (МАМИ, 1980 г.). $y=\dfrac{\sqrt{3x-7}}{\sqrt[6]{x+1}-2}$.

16. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x(x-2)}$.

17. (ВЗЭИС, 1978 г.; ТартГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$.

18. (УжГУ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{x^2-x-20}+\sqrt{6-x}$.

19. (АзГПИ, физфак, 1979 г.). $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$.

20. (ВЗЭИС, 1977 г.). $y=\dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}$.

21. (МАМИ, 1979 г.). $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{x-1}$.

22. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$.

23. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=\sqrt{\dfrac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$.

24. (ВТУЗ ЗИЛ, 1977 г.; МИИГАиК, 1979 г.). $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

25. (МИИГАиК, 1978 г.; ВЗИИЖТ, 1979 г.) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+6x+8}}$.

26. (МИСиС, 1979 г.). $y=\sqrt{x-x^2}+\sqrt{3x-x^2-2}$.

27. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\sqrt{x^2-x-20}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x-14}}$.

28. (МСИ, 1977 г.). $y=\dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}}+\sqrt{x^2-x-20}$.

29. (МИИГАиК, 1980 г.; ЛГПИ, 1980 г.).

$$y=\sqrt{\frac{x^4-3x^2+x+7}{x^4-2x^2+1}-1}.$$

30. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

31. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\arcsin 3^x$.

32. (МСИ, 1977 г.). $f(x)=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}$.

33. (КуйбГУ, физфак, 1977 г.). $y=\dfrac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6+35x-6x^2}}$.

34. (МАМИ, 1980 г.). $y=\dfrac{\log_3(x^2+1)}{\sin^2 x-\sin x+0{,}25}$.

35. (МИИЗ, 1980 г.). $y=\dfrac{1}{3-\log_3(x-3)}$.

36. (КуйбГУ, мехмат, 1977 г.). $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}$.

37. (МАТИ, 1980 г.). $f(x)=\dfrac{\sqrt{3\log_{64}x-1}}{\sqrt[3]{2x-11}}$.

38. (ОГУ, 1980 г.). $y=\log_2\dfrac{x-2}{x+2}$.

39. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\lg\dfrac{x+3}{x+1}$.

40. (МСИ, 1977 г.). $y=\sqrt{\lg(x+1)}$.

41. (ВЗФЭИ, 1980 г.). $y=\lg((x^2+8x+7)/(x^2+7))$.

42. (МВМИ, 1978 г.). $y=\sqrt{1-x}+\lg(x+1)$.

43. (МВМИ, 1977 г.). $y=\sqrt{x+1}+\lg(1-x)$.

44. (ВЗЭИС, 1977 г.). $y=\lg((x^2-3x)(x+5))$.

45. (ВЗЭИС, 1978 г.). $y=\sqrt{4x-x^2}-\log_3(x-2)$.

46. (МИИЗ, 1979 г.). $y=\sqrt{x^2+4x-5}\cdot\lg(x+1)$.

47. (УжГУ, 1980 г.). $f(x)=\lg(5x^2-8x-4)+\sqrt{x-1}$.

48. (МИИЗ, 1979 г.). $y=\sqrt{x^2+4x-5}\cdot\lg(x+5)$.

49. (МИИЗ, 1979 г.). $y=(\lg(3-2x-x^2))/\sqrt{x}$.

50. (МТИММП, 1980 г.). $y=\sqrt{\lg((3-x)/x)}$.

51. (ЕГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{\lg((1-2x)/(x+3))}$.

52. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt[4]{x-|x|}+\lg(x+2)$.

53. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+10)^2}$.

54. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-2x-63}}$.

55. (КуйбГУ, химико-биолог. фак., 1977 г.). $y=\sqrt{\lg((5x-x^2)/4)}$.

56. (МАИ, 1977 г.). $y=\sqrt{(x^2-3x-10)\lg^2(x-3)}$.

57. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\lg\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$.

58. (МИНХ, 1980 г.). $y=\lg(5x^2-8x-4)+(x+3)^{-0,5}$.

59. (МИСиС, 1980 г.). $y=\sqrt{(1-5^x)/(7^{-x}-7)}$.

60. (МТИММП, 1977 г.; КГУ, 1979 г.). $y=\sqrt{4x-x^2}+\lg(x^2-1)$.

61. (МИСИ, 1978 г.). $y=\sqrt{1-\lg(x-1)}+\sqrt{(4-x)/(x+2)}$.

62. (МИИГАиК, 1978 г.; БГУ, 1980 г.; ЛьвГУ, 1980 г.; ЛатвГУ, 1980 г.; МТИМБО, 1982 г.). $y=\sqrt{\log_{0,3}((x-1)/(x+5))}$.

63. (БГУ, физфак и фак. радиофизики и электроники, 1979 г.). $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

64. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\sqrt{\log_{0,3}(x^2-5x+7)}$.

65. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)+4}$.

66. (МАИ, 1977 г.). $y=\sqrt{\log_{0,4}\frac{x-1}{x+5}\cdot\frac{1}{x^2-36}}$.

67. (ВильнГУ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{\log_{0,5}(-x^2+x+6)}+\frac{1}{x^2+2x}$.

68. (ВЗЭИС, 1977 г.; БГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

69. (КГУ, 1979 г.). $f(x)=\sqrt{16x-x^5}+\log_{1/2}(x^2-4)$.

70. (БГУ, мехмат, 1979 г.). $y=\sqrt{\log_{1/2}(x/(x^2-1))}$.

71. (МАИ, 1979 г.). $f(x)=\sqrt{4^{(3x^2+18x+29)/(x+3)}-2^{6x+17}}$.

72. (МИСиС, 1980 г.). $y=\sqrt{\log_{0,5}(3x-8)-\log_{0,5}(x^2+4)}$.

73. (КГУ, 1979 г.). $f(x)=\sqrt{4x-x^3}+\lg(x^2-1)$.

74. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\sqrt[4]{\frac{1}{2}\log_4 16-\log_8(x^2-4x+3)}$.

75. (МЭИ, 1979 г.). $f(x)=\log_4\left(2-\sqrt[4]{x}-\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)$.

76. (МАМИ, 1980 г.). $y=\sqrt{\frac{3^x-4^x}{2x^2-x-8}}$.

77. (МЭИ, 1979 г.). $f(x)=\log_2\left(-\log_{1/2}\left(1+\frac{6}{\sqrt[4]{x}}\right)-2\right)$.

78. (ЕГУ, фак. прикладной матем., 1981 г.). $y=\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{5^{x-2}-1}$.

79. (КолПИ, общетехн. фак., 1981 г.). $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

80. (КолПИ, отд. матем. и физики, 1981 г.).

$$y=\sqrt{-x^2+2x+3}+\log_3(x-1).$$

81. (КолПИ, отд. физики и механики, 1981 г.). $y=\lg(x/(x-2))-\sqrt{x-3}$.

82. (БарнГПИ, матфак, 1981 г.). $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\log_5(x-1)}$.

83. (ЛГПИ, физфак, 1981 г.). $f(x)=\log_{2x-5}(x^2-3x-10)$.

84. (МЭИ, 1981 г.). $f(x)=\sqrt[6]{4^x+8^{\frac{2}{3}(x-2)}-52-2^{2(x-1)}}$.

85. (МГУ, 1981 г.). $y=\log_{1,7}\left(\frac{2-f'(x)}{x+1}\right)^{1/2}$, где

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}.$$

86. (РГУ, физфак, 1981 г.). $y=\sqrt{\frac{\log_{0,3}|x-2|}{|x|}}$.

87. (РГУ, геолого-географ. фак., 1981 г.). $y=\sqrt[6]{x+x^2-2x^3}$.

88. (МИИВТ, 1982 г.). $y=\sqrt{x-4}-\frac{x}{x-5}+\lg(39-x)$.

89. (МТИМБО, 1982 г.). $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$.

90. (ТартГУ, 1980 г.; МСИ, 1980 г.; МИИГАиК, 1980 г.). $y=\log_{0,5}(-\log_2((3x-1)/(3x+2)))$.

91. (МЭИ, 1980 г.). $y=\sqrt{\lg\lg x-\lg(4-\lg x)-\lg 3}$.

92. (ЛГПИ, 1978 г.). $y=\sqrt{\log_{x-2}(x^2-8x+15)}$.

93. (МЭИ, 1978 г.). $y=\lg\left(\sqrt{8^{-2+\lg x}}-\sqrt[3]{4^{2-\lg x}}\right)$.

94. (ЛПИ, 1980 г.; МИИГАиК, 1980 г.). $y=\log_{100x}\left(\frac{2\lg x+1}{-x}\right)$.

95. (МЭИ, 1979 г.). $y=\log_2\left(-\log_{1/2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)-1\right)$.

96. (МГМИ, 1981 г.). $y=\log_{|x|-4}2$.

97. (МТИМБО, 1979 г.). $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

98. (ТбГУ, мехмат, 1978 г). $y=\lg(\lg^2 x-5\lg x+6)$.

99. (КолПИ, 1980 г.). $y=\sqrt{\log_{1/2}\frac{x-1}{3x+5}}$.

100. (МТИМБО, 1977 г.). $y=\lg\sin(x-3)-\sqrt{16-x^2}$.

101. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\frac{\lg x}{\sqrt{x^2-2x-63}}$.

102. (МТИМБО, 1980 г.). $y=\arcsin((x-3)/2)-\lg(4-x)$.

103. (МТИМБО, 1980 г.). $y=\sqrt{3-x}+\arcsin((3-2x)/5)$.

104. (МИИГАиК, 1980 г.).

$$y=(x+0,5)^{\log_{(0,5+x)}((x^2+2x-3)/(4x^2-4x-3))}.$$

105. (МИИГАиК, 1980 г.). $y=\log_{100x}((2\lg x+2)/(-x))$.

106. (МИФИ, 1980 г.). $y=\arccos((2x+1)/2\sqrt{2x})$.

107. (МТИМБО, 1980 г.). $y=\arccos(2/(2+\sin x))$.

108. $y=\sqrt{3\sin x-1}$.

109. $y=\sqrt{2\sin(x/2)}$.

110. $y=1/\sqrt{4\cos x+1}$.

111. $y=\sqrt{-2\cos^2 x+3\cos x-1}$.

112. $y=\sqrt{\sin^2 x-\sin x}$.

Найдите области определения и множества значений следующих функций (113—120).

113. (МИФИ, 1978 г.). $y=\frac{x}{|x|}$.

114. (МСИ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{x-x^2}$.

115. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\sqrt{3x^2-4x+5}$.

116. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\lg(3x^2-4x+5)$.

117. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\lg(5x^2-8x+4)$.

118. (МИНХ, 1977 г.). $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}$.

119. (МИФИ, 1980 г.). $f(x)=\log_2\dfrac{\sin x-\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

120. (МИНХ, 1977 г.). $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}$.

121. (МАДИ, 1980 г.). Найдите множество всех x, при которых не существует ни одна из функций $f(x)=\log_{(x-2)/(x+3)}2$ и $g(x)=\sqrt{x^2-9}$.

122*. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a множество значений функции $y=(x-1)/(a-x^2+1)$ не содержит ни одного значения из отрезка $[-1;\ -1/3]$?

123*. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a область значений функции $y=(x+1)/(a+x^2)$ будет содержать отрезок $[0;\ 1]$?

124*. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a множество значений функции $y=(x-1)/(1-x^2-a)$ не содержит ни одного значения из отрезка $[-1;\ 1]$?

§ 9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1°. Основные тождества. Тождества, используемые при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств ($a>0,\ a\neq 1$):

$$a^x=a^y \Leftrightarrow x=y. \tag{1}$$

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}. \tag{2}$$

$$a^0=1. \tag{3}$$

$$a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x, \qquad b>0. \tag{4}$$

$$(a^x)^y=a^{xy}. \tag{5}$$

$$a^{\log_a x}=x, \qquad x>0, \tag{6}$$

$$\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|, \qquad xy>0. \tag{7}$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|, \qquad xy>0. \tag{8}$$

$$\log_a x^\alpha=\alpha\cdot\log_a x, \qquad x>0. \tag{9}$$

$$\log_a x^{2m}=2m\log_a|x|, \qquad x\neq 0,\ m\in\boldsymbol{N}. \tag{10}$$

$$\log_a b=\frac{\log_x b}{\log_x a}, \qquad x>0,\ x\neq 1,\ b>0. \tag{11}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, \qquad b>0,\ b\neq 1. \tag{12}$$

$$\log_a x=\log_{a^k}x^k, \qquad x>0,\ k\in\boldsymbol{R},\ k\neq 0. \tag{13}$$

$$\log_{a^k}x^m=\frac{m}{k}\log_a x, \qquad x>0;\ m,k\in\boldsymbol{R},\ k\neq 0. \tag{14}$$

2°. Показательные уравнения. Если имеем уравнение вида $a^{f(x)}=b$ ($a>0$), то при

1) $b\leqslant 0 \Rightarrow x\in\varnothing$,

2) а) $b>0,\ a\neq 1 \Rightarrow f(x)=\log_a b$, б) $b>0,\ a=1 \Rightarrow a^{f(x)}\equiv 1$, $x\in D(f)$ при $b=1$, $x\in\varnothing$ при $b\neq 1$.

Рассмотрим примеры решения показательных уравнений.

Пример 1. (ЯГУ, 1980 г.). Решите уравнение $3^{x^2-5x+6}=1$.

Решение. Применив тождество (3), имеем $x^2-5x+6=0$. Отсюда $x_1=2,\ x_2=3$.

Ответ. $x=2,\ x=3$.

Пример 2. (МТИЛП, 1980 г.). $(3/7)^{3x-7}=(7/3)^{7x-3}$.

Решение. Заметим, что $3/7=(7/3)^{-1}$ и перепишем наше уравнение в виде

$$(3/7)^{3x-7}=(3/7)^{-7x+3}.$$

Применив тождество (1), получим

$$3x-7=-7x+3, \qquad x=1.$$

Ответ. 1.

Пример 3. (МИЭТ, 1978 г.). $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Решение. Переходя к основанию степени 2, получим

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-1/2}\right)^{-x}$$

или

$$2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=(2^{-2}\cdot 2^{-1/2})^{-x}.$$

Согласно тождеству (2), будем иметь

$$2^{-3+2(2x-8)}=(2^{-2-0{,}5})^{-x}.$$

Пользуясь тождеством (5), запишем

$$2^{-3+4x-16}=2^{2{,}5x}.$$

Последнее уравнение по тождеству (1) равносильно уравнению

$$-3+4x-16=2{,}5x,$$

откуда $x=38/3$.

Ответ. 38/3.

Рассмотрим примеры решения показательных уравнений, сводящихся к квадратным.

Пример 4. (МАИ, 1979 г.). $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

Решение. Применим тождество (2) и запишем исходное уравнение в виде $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^x\cdot 5-250=0$. Подставив $5^x=t>0$ в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{5}t^2+5t-250=0.$$

Отсюда $t_1=-50,\ t_2=25$. Значение $t_1=-50$ не удовлетворяет условию $t>0$. Значит, $5^x=25,\ x=2$.

Ответ. 2.

Пример 5. (МИУ, 1978 г.; МФИ, 1979 г.). $9^x+6^x=2\cdot 4^x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4^x: $(9/4)^x+(6/4)^x-2=0$, или $(3/2)^{2x}+(3/2)^x-2=0$.

Обозначим $(3/2)^x=t$ $(t>0)$; тогда последнее уравнение запишется так:

$$t^2+t-2=0, \quad t_1=-2, \quad t_2=1.$$

Значение t_1 не удовлетворяет условию $t>0$. Следовательно, $(3/2)^x=1$, $x=0$.

Ответ. 0.

Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку рассмотрим на следующих примерах.

Пример 6. (МИИЗ, 1979 г.). $5^{x+1}-5^{x-1}=24$.

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобку общий множитель 5^{x-1}: $5^{x-1}(5^2-1)=24$.

Получим $5^{x-1}=1$, откуда $x-1=0$, $x=1$.

Ответ. 1.

Пример 7. (КИСИ, 1980 г.). $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$.

Решение. После вынесения за скобку в левой части 6^x, в правой 2^x, получим $6^x(1+6)=2^x(1+2+4)$, или $6^x=2^x$. Разделим обе части уравнения на $2^x\neq 0$: $3^x=1$, $x=0$.

Ответ. 0.

3°. Показательные неравенства. При решении показательных неравенств $a^{f(x)}>b$ $(a>0)$, если

1) $b\leqslant 0$, то $x\in D(f)$,

2) $b>0$, то

$$f(x)>\log_a b \text{ при } a>1,$$
$$f(x)<\log_a b \text{ при } 0<a<1;$$

при $a=1$ неравенство равносильно числовому неравенству $1>b$.

Рассмотрим решение некоторых показательных неравенств.

Пример 8. (МГУ, физфак, 1980 г.). $2^{x+2}>(1/4)^{1/x}$ или $2^{x+2}>(2^{-2})^{1/x}$.

Решение. По тождеству (5) имеем $2^{x+2}>2^{-2/x}$. Так как основание $2>1$, то $x+2>-2/x$ (знак неравенства сохраняется). Решив последнее неравенство, получим $x\in\,]0, +\infty[$.

Пример 9. (МЭИ, 1978 г.). $(1{,}25)^{1-x}<(0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

Решение. Запишем исходное неравенство в виде

$$(5/4)^{1-x}<(16/25)^{2(1+\sqrt{x})},$$

или

$$(4/5)^{x-1}<(4/5)^{2\cdot 2(1+\sqrt{x})}.$$

Так как основание $0<4/5<1$, то последнее неравенство равносильно неравенству $x-1>4(1+\sqrt{x})$ (знак неравенства изменился на противоположный!). Далее имеем $x-4\sqrt{x}-5>0$, откуда $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)>0$, т. е. $\sqrt{x}>5$. Окончательно получим $x>25$.

Ответ: $x\in\,]25, +\infty[$.

4°. Логарифмические уравнения. Рассмотрим наиболее часто употребляемые методы решения логарифмических уравнений.

1. *Решение уравнений, основанное на определении логарифма.*

Пример 10. (МВМИ, 1977 г.). $\log_3(5+4\log_3(x-1))=2$.

Решение. Логарифмом числа b по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Следовательно,

$$5+4\log_3(x-1)=3^2,$$

или

$$4\log_3(x-1)=9-5, \quad \log_3(x-1)=1.$$

И снова по определению логарифма будем иметь

$$x-1=3^1, \quad x=4.$$

Проверка, которая является частью решения этого уравнения, подтверждает правильность полученного результата.

Ответ: $x=4$.

2. *Решение уравнений потенцированием.*

Пример 11. (МВТУ, 1979 г.). $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$.

Решение. Для нахождения области определения функции, стоящей в левой части, составим систему неравенств

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 1-x>0, \end{cases} \Rightarrow x<1.$$

Применив тождество (7), можно записать, что

$$\log_2((3-x)(1-x))=3,$$

а по определению логарифма будем иметь

$$(3-x)(1-x)=2^3, \quad \text{или} \quad x^2-4x-5=0.$$

Тогда $x_1=5$, $x_2=-1$. Так как первое значение неизвестного не принадлежит области определения, то окончательно получим $x=-1$.

Ответ. -1.

3. *Применение основного логарифмического тождества.*

Пример 12. (МТИ, 1979 г.). $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$.

Решение. Область определения:

$$\begin{cases} 9-2^x>0, \\ 3-x>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x<9, \\ x<3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\log_2 9, \\ x<3, \end{cases} \Rightarrow x<3.$$

Применив в правой части тождество (6), будем иметь

$$\log_2(9-2^x)=3-x.$$

По определению логарифма

$$2^{3-x}=9-2^x, \quad 2^3/2^x=9-2^x,$$
$$2^{2x}-9 . 2^x+8=0,$$

$2^x=1$, $x=0$; $2^x=8$, $x=3$ — посторонний корень.

Ответ: $x=0$.

4. *Логарифмирование.*

Пример 13. (МИНХ, 1979 г.). $(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1)$.

Решение. Область определения: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$\lg(x+1)\cdot\lg(x+1)=\lg 100+\lg(x+1).$$

Обозначим $\lg(x+1)=t$. Тогда уравнение примет вид $t^2-t-2=0$. Его решения $t_1=-1$, $t_2=2$, т. е.

$$\lg(x+1)=-1, \quad x+1=1/10, \quad x=-0{,}9;$$
$$\lg(x+1)=2, \quad x+1=100, \quad x=99.$$

Ответ: $-0{,}9$; 99.

5. *Замена переменного.*

Пример 14. (МИИЗ, 1979 г.). Решите уравнение $(\lg x)^2-\lg x^3+2=0$.

Решение. Введем переменную $t=\lg x$, $x>0$. Исходное уравнение примет вид $t^2-3t+2=0$. Его решения $t_1=1$, $t_2=2$. Откуда

$$\lg x=1, \quad x=10;$$
$$\lg x=2, \quad x=100.$$

Ответ: 10; 100.

6. *Переход к другому основанию.*

Пример 15. (МАИ, 1979 г.). $1+\log_2(x-1)=\log_{(x-1)}4$.

Решение. Область определения: $x>1$, $x\neq 2$.

По свойству (11)

$$\log_{(x-1)}4=\frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)}=\frac{2}{\log_2(x-1)}.$$

Обозначим $\log_2(x-1)=y$. Тогда наше исходное уравнение примет вид $1+y=2/y$, или $y^2+y-2=0$, откуда $y_1=-2$, $y_2=1$.

$$\log_2(x-1)=-2, \quad x-1=1/4. \quad x_1=5/4,$$
$$\log_2(x-1)=1, \quad x-1=2, \quad x_2=3.$$

Ответ: 5/4, 3.

5°. **Логарифмические неравенства.** При решении логарифмических неравенств необходимо помнить, что функция $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) является убывающей, если $0<a<1$, и возрастающей, если $a>1$. Поэтому неравенство вида

$$\log_a f(x)<\log_a \varphi(x)$$

при $0<a<1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>\varphi(x), \\ \varphi(x)>0, \end{cases}$$

при $a>1$ — системе

$$\begin{cases} f(x)<\varphi(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим решение некоторых типичных логарифмических неравенств.

Пример 16. (МИСиС, 1979 г.). $\log_{1/5}((4x+6)/x)\geqslant 0$.

Решение. Так как $\log_{1/5}1=0$, то данное неравенство можно записать так:

$$\log_{1/5}((4x+6)/x)\geqslant\log_{1/5}1.$$

С учетом области определения функции это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}(4x+6)/x>0,\\(4x+6)/x\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}(4x+6)/x>0,\\(4x+6)/x-1\leqslant 0.\end{cases}$$

Неравенства решаем методом интервалов

$$\begin{cases}4\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot x>0,\\3x(x+2)\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\left(x+\frac{3}{2}\right)>0,\\x(x+2)\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow x\in[-2;\ -3/2[.$$

Ответ: $x\in[-2;\ -3/2[$.

Пример 17. (МТИ, 1978 г.). $\log_{2x+3}x^2<1$.

Решение. $\log_{2x+3}x^2<\log_{2x+3}(2x+3)$. Данное неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<2x+3<1,\\x^2>2x+3;\end{cases}\quad(1)\\\begin{cases}2x+3>1,\\0<x^2<2x+3.\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$$

Решая систему (1), получим

$$\begin{cases}-3/2<x<-1,\\(x-3)(x+1)>0.\end{cases}\qquad(3)$$

Система (3) эквивалентна совокупности двух систем

$$\begin{cases}-3/2<x<-1,\\x>3;\end{cases}\qquad(4)$$

$$\begin{cases}-3/2<x<-1,\\x<-1.\end{cases}\qquad(5)$$

Система (4) не имеет решений. Решение системы (5): $x\in]-3/2;\ -1[$. Решая систему (2), получим

$$\begin{cases}x>-1,\\(x-3)(x+1)<0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x>-1,\\-1<x<3,\end{cases}\quad\text{т. е. } x\in]-1;\ 3[.$$

Ответ: $x\in]-3/2,\ -1[\cup]-1;\ 3[$.

Пример 18. (МАИ, 1979 г.). $\log_{(x+4)/2}\left(\log_2\frac{2x-1}{3+x}\right)<0$.

Решение. Решением данного неравенства будет объединение множеств решений таких систем

$$\begin{cases} 0<(x+4)/2<1, \\ \log_2 \dfrac{2x-1}{3+x}>0, \\ \dfrac{2x-1}{3+x}>0, \\ \log_2 \dfrac{2x-1}{3+x}>1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (x+4)/2>1, \\ \log_2 \dfrac{2x-1}{3+x}>0, \\ \dfrac{2x-1}{3+x}>0, \\ \log_2 \dfrac{2x-1}{3+x}<1. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (1), получим

$$\begin{cases} 0<x+4<2, \\ \dfrac{2x-1}{3+x}>1, \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)>0, \\ \dfrac{2x-1}{x+3}>2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x<-2, \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)>0, \\ \dfrac{2x-1-2x-6}{3+x}>0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4<x<-2, \\ x+3<0, \\ x-1/2<0; \end{cases} \Rightarrow x \in]-4, -3[.$$

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{2x-1}{x+3}>1, \\ 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)>0, \\ \dfrac{2x-1}{3+x}<2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{2x-1-x-3}{x+3}>0, \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)>0, \\ \dfrac{2x-1-2x-6}{3+x}<0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>4, \\ x>1/2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in]4, +\infty[.$$

Ответ: $]-4, -3[\cup]4, +\infty[$.

6°. Системы показательных и логарифмических уравнений. Рассмотрим решение некоторых систем на примерах.

Пример 19. (МИХМ, 1979 г.). $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$

Решение. Область определения: $x+y>0$.

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2^{y-x}}, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем, что $x+y=2^{x-y}$ и подставим во второе уравнение. Тогда

$$(2^{x-y})^{x-y}=2 \Rightarrow 2^{(x-y)^2}=2 \Rightarrow (x-y)^2=1.$$

Решением данной системы будет решение совокупности систем

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=1/2. \end{cases}$$

Ответ: (3/2; 1/2), (—1/4; 3/4).

Пример 20. (МАТИ, 1980 г.).

$$\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2, \\ \log_{27}(x+y)=2/3. \end{cases}$$

Решение. Область определения: $x>0$, $y>0$.

$$\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=\log_3 9+\log_3 2, \\ \log_{27}(x+y)=2/3. \end{cases}$$

В первом уравнении воспользуемся тождеством (7), во втором — определением логарифма. Получим

$$\begin{cases} \log_3(xy)=\log_3 18, \\ x+y=(3^3)^{2/3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=18, \\ x+y=9. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим решение и данной системы.

Ответ: $\{(6;\ 3),\ (3;\ 6)\}$.

Показательные уравнения

Решите уравнения (1—82).

1. (МВМИ, 1977 г.) $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}}=64$.
2. (МИЭТ, 1977 г.) $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{(0{,}04)^x}{25}$.
3. (МАИ, 1977 г.). $(5/3)^{x+1}\cdot(9/25)^{x^2+2x-11}=(5/3)^9$.
4. (МГУ, ВМК, 1979 г.). $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$.
5. (МТИ, 1979 г.). $2^{3/\log_2 x}=1/64$.
6. (МИСиС, 1978 г.). $4^{2/x}-5\cdot 4^{1/x}+4=0$.
7. (МАТИ, 1979 г.). $5^x-24=25/5^x$.
8. (ЛьвГУ, 1980 г.). $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$.
9. (МВТУ, 1979 г.). $4^{x^2+2}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$.
10. (МЭСИ, 1978 г.). $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$.
11. (МИНХ, 1979 г.). $64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x=0$.
12. (МАИ, 1979 г., МТИМБО, 1979 г.). $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 3^{2x}$.
13. (МИНХ, 1979 г.). $7^{x+2}-\dfrac{1}{7}\cdot 7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48$.
14. (РПИ, 1980 г.). $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{2x/3}=675$.

15. (КИСИ, 1980 г.). $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 35+7^x\cdot 35=0$.
16. (МИНХ, 1979 г.). $5^{x-1}=10^x\cdot 2^{-x}\cdot 5^{x+1}$.
17. (МАМИ, 1979 г.). $2^{x+1}\cdot 5^x=200$.
18. (МГМИ, 1980 г.). $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$.
19. (МАИ, 1979 г.). $3^{2x+1}+10\cdot 3^x+3=0$.
20. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-1}+4=0$.
21. (МТИМБО, 1979 г.). $4^{-1/x}+6^{-1/x}=9^{-1/x}$.
22. (ВТУЗ ЗИЛ, 1979 г.). $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{x/4-\sqrt{x/3}}\right)^{x/4+\sqrt{x/3}}=\sqrt[4]{3^7}$.
23. (ЛГПИ, 1979 г.). $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$.
24. (МТИММП; МИЭТ, 1978 г.). $4^x-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$.
25. (ВЗПИ, 1978 г.). $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.
26. (МСИ, 1979 г.). $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.
27. (МИСиС, 1978 г.). $64^{1/x}-2^{3+3/x}+12=0$.
28. (РПИ, 1980 г.). $2^{2+x}-2^{2-x}=15$.
29. (МТИМБО, 1978 г.). $9^x-2^{x+0{,}5}=2^{x+3{,}5}-3^{2x-1}$.
30. (МЭИ, 1977 г.). $\left(3^{x^2-7{,}2x+3{,}9}-9\sqrt{3}\right)\lg(7-x)=0$.
31. (КИСИ, 1980 г.). $3^{12x-1}-9^{6x-1}-27^{4x-1}+81^{3x+1}=2192$.
32. (ЛГУ, эконом. фак., 1980 г.). $5^{2x}=3^{2x}+2\cdot 5^x+2\cdot 3^x$.
33. (МГМИ, 1979 г.). $x^{5\sin 3x+2}=1/\sqrt{x}$.
34. (МТИМБО, 1979 г.). $2^{2\lg 4x-1}-7^{\lg 4x}=7^{\lg 4x-1}-3\cdot 4^{\lg 4x}$.
35. (ПГУ, 1980 г.). $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$.
36. (МИЭТ, 1978 г.). $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{-x+2}=135$.
37. (МИИГАиК, 1978 г.). $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.
38. (МТИМБО, 1982 г.). $\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$.
39. (МАИ, 1979 г.). $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$.
40. (ВТУЗ ЗИЛ, 1979 г.). $4^{\frac{1}{x}-2}=\dfrac{\lg\sqrt{10}}{2}$.
41. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sqrt{7^{2x^2-5x-6}}=(\sqrt{2})^{3\log_2 49}$.
42. (МГИМБО, 1979 г.). $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.
43. (МПИ, 1979 г.). $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.
44. (ВильнГУ, 1980 г.). $3^{4x+8}-4\cdot 3^{2x+5}+28=2\log_2\sqrt{2}$.
45. (МИНХ, 1979 г.). $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$.
46. (МИСиС, 1979 г.). $3^{\lg \operatorname{tg} x}-2\cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x+1}=1$.
47. (КГУ, мехмат, 1980 г.). $3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}$.
48. (МЭСИ, 1979 г.). $(5/12)^x\cdot(6/5)^{x-1}=(0{,}3)^{-1}$.
49. (МИЭТ, 1979 г.). $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$.
50. (МИРЭА, 1978 г.). $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$.
51. (МГМИ, 1979 г.). $x^{\frac{5}{4}-2\cos 3x}=\sqrt[4]{x}$.
52. (РПИ, 1980 г.). $32^{(x+5)/(x-7)}=0{,}25\cdot 128^{(x+17)/(x-3)}$.

53. (ВГУ, матфак, 1980 г.). $(4/9)^{\sqrt{x}}=(2{,}25)^{\sqrt{x}-4}$.

54. (ВГУ, ПММ, 1980 г.). $2^x\cdot 5^{x-1}=0{,}2\cdot 10^{2-x}$.

55. (ЛГУ, 1980 г.). $4^{3+2\cos 2x}-7\cdot 4^{1+\cos 2x}-4^{1/2}=0$.

56. (МИНХ, 1979 г.). $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$.

57. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1982 г.).

$$2^{x^2-6}\cdot 3^{x^2-6}=\frac{1}{6^5}\left(6^{x-1}\right)^4.$$

58. (МТИМБО, 1977 г., БашГУ, 1980 г.). $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

59. (МТИМБО, 1981 г.). $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$.

60. (МТИМБО, 1981 г.). $9^{2x+4}=26\cdot 3^{2x+3}+3$.

61. (МТИМБО, 1981 г.). $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}$.

62. (МТИМБО, 1981 г.). $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

63. (МТИМБО, 1982 г.). $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

64. (МТИМБО, 1977 г.).

$$\sqrt[x-4]{5^{x/(\sqrt{x}+2)}\cdot(0{,}2)^{4/(\sqrt{x}+2)}}=125\cdot(0{,}4)^{(x-2)/(x-4)}.$$

65. (МТИМБО, 1982 г.). $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{1/4}x-1}=\frac{26}{5}$.

66. (МТИМБО, 1979 г.). $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{4}\cdot 9^{x+1}$.

67. (МТИМБО, 1979 г.). $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$.

68. (МТИМБО, 1979 г.). $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0$.

69. (МТИМБО, 1979 г.). $4^x\cdot 5^{x+1}=5\cdot 20^{2-x}$.

70. (МТИМБО, 1979 г.). $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$.

71. (МТИМБО, 1979 г.). $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$.

72. (МТИМБО, 1979 г.). $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26$.

73. (МТИМБО, 1979 г.). $3\cdot 2^{x/2}-7\cdot 2^{x/4}=20$.

74. (МТИМБО, 1980 г.). $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$.

75. (МТИМБО, 1980 г.). $(\sqrt{x})^{\log_3 x-1}=3$.

76. (МТИМБО, 1980 г.). $x^{\lg x}=1000x^2$.

77. (МТИ, 1979 г.; МТИМБО, 1980 г.). $(0{,}4)^{\lg^2 x+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^3}$.

78. (МТИМБО, 1980 г.). $(0{,}6)^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

79. (МТИМБО, 1980 г.). $6\cdot 9^{1/x}-13\cdot 6^{1/x}+6\cdot 4^{1/x}=0$.

80. (МТИМБО, 1980 г.). $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

81. (МТИМБО, 1980 г.). $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$.

82. (МТИМБО, 1980 г.). $9^{1+\log_3 x}-3^{1+\log_3 x}-210=0$.

83. (МАТИ, 1977 г.). При каком значении p уравнение $p\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

Показательные неравенства

Решите неравенства (84—124).

84. (МГПИ, 1980 г.) $2^{3-6x}>1$.

85. (МАМИ, 1979 г.). $16^x>0{,}125$.

86. (МАМИ, 1979 г.). $(0{,}3)^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$.

87. (МИИГАиК, 1978 г.). $(1/3)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$.

88. (ЛьвГУ, 1980 г.). $0{,}1^{4x^2-2x-2}\leqslant 0{,}1^{2x-3}$.

89. (МИИЗ, 1979 г.). $\sqrt[x+1]{3}>9$.

90. (МАТИ, 1980 г.). $8^{\sqrt{8^x}}>4096$.

91. (ВЗЭИС, 1978 г.). $\left(\frac{2}{5}\right)^{(6-5x)/(2+5x)}<25/4$.

92. (МТИ, 1979 г.). $2^x+2^{-x}-3<0$.

93. (РПИ, 1978 г.). $\frac{4^x+2x-4}{x-1}\leqslant 2$.

94. (МГУ, 1977 г.). $4^{-x+0,5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

95. (МИИЗ, 1978 г.). $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}<0$.

96. (МИНХ, 1977 г.). $4^{x+1}-16^x<2\log_4 8$.

97. (КГУ, геофак, 1978 г.). $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$.

98. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\leqslant 0$.

99. (ВЗЭИС, 1977 г.). $4^x-2^{2(x-1)}+8^{2(x-2)/3}>52$.

100. (МТИММП, 1979 г.). $(0{,}3)^{2+4+6+\ldots+2x}>(0{,}3)^{72}$, $x\in\boldsymbol{N}$.

101. (ЛьвГУ, 1980 г.). $2^{2x+1}-21\cdot(1/2)^{2x+3}+2\geqslant 0$.

102. (МИТХТ, 1979 г.). $3^{4-3x}-35(1/3)^{2-3x}+6\geqslant 0$.

103. (МИНХ, 1979 г.). $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$.

104. (МИНХ, 1979 г.). $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\leqslant 9$.

105. (ЛатвГУ, 1980 г.). $5^{2x+1}>5^x+4$.

106. (МАДИ, 1979 г.). $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

107. (МАМИ, 1977 г.). $3^{72}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1$.

108. (МИЭТ, 1978 г.). $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x>0$.

109. (МИСиС, 1978 г.). $25^{-x}-5^{-x+1}\geqslant 50$.

110. (МАДИ; ЛПИ, 1977 г.). $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

111. (МАДИ, 1978 г.). $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$.

112. (МИЭТ, 1977 г.). $9\cdot 4^{-1/x}+5\cdot 6^{-1/x}<4\cdot 9^{-1/x}$.

113. (МАИ, 1977 г.). $8\cdot\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

114. (МАМИ, 1979 г.). $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1.$

115. (МАТИ, 1978 г.). $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > 9.$

116. (МИСиС, 1977 г.). $x^2 2^{2x} + 9(x+2)2^x + 8x^2 \leqslant (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16.$

117. (МИИГАиК, 1977 г.). $(1/3)^{\log_{1/3}(3\cdot(1/2)^x+5)} < 2^{1+x}.$

118. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1978 г.). $4^x - 3 \leqslant 2^{x+1}.$

119. (КГУ, ВМК, 1979 г.). $(1/3)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > 1/\sqrt{27}.$

120. (КГУ, мехмат, 1980 г.). $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x.$

121. (МИФИ, 1978 г.). $3^{\sqrt{x}} > 2^a.$

122. (ЛГУ, 1980 г.). $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}.$

123. (СимфГУ, физфак, 1981 г.). $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5.$

124. (СимфПИ, 1981 г.). $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}.$

Логарифмические уравнения

Решите уравнения (**125—261**).

125. (МГУ, геофак, 1980 г.). $\log_{x-1} 3 = 2.$

126. (МИЭТ, 1978 г.). $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))) = 1/2.$

127. (МВМИ, 1977 г.). $\log_3(1+\log_3(2^x-7)) = 1.$

128. (МФТИ, 1977 г.). $\log_3(3^x-8) = 2-x.$

129. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1.$

130. (ВильнГУ, 1980 г.). $\log_{5-x}(x^2-2x+65) = 2.$

131. (МСИ, 1980 г.). $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x.$

132. (МХТИ, 1979 г.). $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$

133. (МХТИ, 1977 г.). $\log_7(2^x-1) + \log_7(2^x-7) = 1.$

134. (МИИЗ, 1979 г.). $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1).$

135. (МТИММП, 1978 г.). $1 - \lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2} + \lg x + \frac{1}{3}\lg 5\right).$

136. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $\lg x - \frac{1}{2}\lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lg\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right).$

137. (МТИММП, 1977 г.). $3^{\log_3 \lg\sqrt{x}} - \lg x + \lg^2 x - 3 = 0.$

138. (ВЗЭИС, 1978 г.). $(x-2)^{\lg^2(x-2)+\lg(x-2)^5-12} = 10^{2\lg(x-2)}.$

139. (МФТИ, 1976 г.). $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

140. (МИИЗ, 1979 г.). $x^{1+\lg x}=10x$.

141. (МАТИ, 1979 г.). $x^{2\lg x}=10x^2$.

142. (КГУ, геофак, 1978 г.). $x^{(\lg x+5)/3}=10^{5+\lg x}$.

143. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $x^{\log_3 x}=9$.

144. (МСИ, 1980 г.). $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$.

145. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1982 г.). $x^{\lg x+1}=10^6$.

146. (МТИМБО, 1981 г.). $x^{(\lg x+7)/4}=10^{\lg x+1}$.

147. (МТИМБО, 1982 г.). $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9$.

148. (МТИМБО, 1982 г.). $((\lg x)/2)^{\lg^2 x+\lg x^2-2}=\lg\sqrt{x}$.

149. (МГУ, физфак, 1980 г.). $3\sqrt{\log_2 x}-\log_2 8x+1=0$.

150. (МАТИ, 1979 г.). $\lg^2 x-3\lg x=\lg(x^2)-4$.

151. (МАИ, 1979 г.). $\log_{1/3} x-3\sqrt{\log_{1/3}x}+2=0$.

152. (МАИ, 1979 г.). $2(\log_x\sqrt{5})^2-3\log_x\sqrt{5}+1=0$.

153. (УжГУ, 1980 г.). $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$.

154. (БашГУ, 1980 г.). $(a^{\log_b x})^2-5x^{\log_b a}+6=0$.

155. (МТИМБО, 1979 г.). $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg(1/x)$.

156. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.

157. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1981 г.). $\log_4(x^2-1)-\log_4(x-1)^2=\log_4\sqrt{(4-x)^2}$.

158. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1981 г.). $2\log_3\frac{x-3}{x-7}+1=\log_3\frac{x-3}{x-1}$.

159. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x)$.

160. (МАИ, 1979 г.). $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$.

161. (МИИГАиК, 1978 г.). $\log_x(9x^2)\cdot\log_3^2 x=4$.

162. (МИИГАиК, 1978 г.). $\log_{1/2}^2(4x)+\log_2(x^2/8)=8$.

163. (МИТХТ, 1979 г.). $\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.

164. (МТИМБО, 1982 г., МЭСИ, 1977 г.).

$$6-\left(1+4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}}3}\right)\cdot\log_7 x=\log_x 7,\qquad x\in\boldsymbol{Q}.$$

165. (МИИВТ, 1982 г.). $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$.

166. (МИИГАиК, 1978 г.). $\log_3(3^x-6)=x-1$.

167. (МХТИ, 1979 г.). $\log_3(4^x-3)+\log_3(4^x-1)=1$.

168. (МАИ, 1979 г.). $\log_3(\log_{1/2}^2 x-3\log_{1/2}x+5)=2$.

169. (МГУ, химфак, 1980 г.). $\log_5\left(\frac{2+x}{10}\right)=\log_5\left(\frac{2}{x+1}\right)$.

170. (МГМИ, 1981 г.). $1+2\log_{(x+2)}5=\log_5(x+2)$.

171. (МАИ, 1981 г.). $\log_4 2^{4x}=2^{\log_2 4}$.

172. (МВМИ, 1977 г.). $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{15}{\log_2\frac{x}{8}-1}$.

173. (МСИ, 1977 г.). $\frac{1-2(\lg x^2)^2}{\lg x-2(\lg x)^2}=1$.

174. (ЛьвГУ, 1980 г.; МТИМБО, 1981 г.). $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

175. (МАДИ, 1977 г.). $\frac{1}{2}\lg(5x-4)+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$.

176. (МИНХ, 1979 г.). $\log_4(2\cdot 4^{x-2}-1)+4=2x$.

177. (МИИЖТ, 1979 г.). $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2$.

178. (МИНХ, 1980 г.). $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^4-3)=0$.

179. (ВГУ, 1981 г.). $\log_3 x-2\log_{1/3}x=6$.

180. (МГПИ, 1980 г.). $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

181. (МИТХТ, 1979 г.). $2\log_8(2x)+\log_8(x^2+1-2x)=4/3$.

182. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{1}{6}\log_2(x-2)-\frac{1}{3}=\log_{1/8}\sqrt{3x-5}$.

183. (МТИ, 1979 г.). $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

184. (МИУ, 1978 г.). $\sqrt{\log_2(2x^2)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$.

185. (МАТИ, 1980 г.). $\frac{3\lg x+19}{3\lg x-1}=2\lg x+1$.

186. (МИЭТ, 1978 г.). $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$.

187. (МИЭТ, 1978 г.). $\log_3^2 6-\log_3^2 2=(\lg^2 x-2)\log_3 12$.

188. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $1-\frac{1}{2}\lg(2x-1)=\frac{1}{2}\lg(x-9)$.

189. (МСИ, 1980 г.). $\frac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}=-1$.

190. (МГПИ, 1980 г.). $\lg(3x^2+7)-\lg(3x-2)=1$.

191. (МИНХ, 1979 г.). $\frac{1}{3}\lg(x^2-16x+20)-\lg\sqrt[3]{7}=\frac{1}{3}\lg(8-x)$.

192. (МАИ, 1979 г.). $\log_6 2^{x+3}-\log_6(3^x-2)=x$.

193. (ПГУ, 1980 г.). $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-\sqrt[x]{3}\right)$.

194. (МВМИ, 1977 г.). $\lg(5^{x-2}+1)=x+\lg 13-2\lg 5+(1-x)\lg 2$.

195. (КГУ, ВМК, 1980 г.). $\frac{1}{2}\lg x+3\lg\sqrt{2+x}=\lg\sqrt{x(x+2)}+2$.

196. (МВТУ, 1979 г.). $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$.

197. (МТИПП, 1978 г.). $\frac{1}{\log_6(x+3)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1$.

198. (МЭИ, 1979 г.). $\log_3(9^x+9)=x+\log_3(28-2\cdot 3^x)$.

199. (МПИ, 1979 г.). $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

200. (МПИ, 1979 г.; МТИМБО, 1982 г.). $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-$
$-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$

201. (МВТУ, 1978 г.; МТИМБО, 1982 г.).
$$\log_2(4^x+4)=\log_2 2^x+\log_2(2^{x+1}-3).$$

202. (МЭСИ, 1977 г.). $\log_{\sqrt{5}}x\cdot\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}}=-\sqrt{6}.$

203. (МСИ, 1977 г.). $\lg(3^x-2^{4-x})=2+\frac{1}{4}\lg 16-\frac{x\lg 4}{2}.$

204. (МСИ, 1977 г.). $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg^2 x-\lg x}=\frac{1}{125}\cdot 5^{\lg x-1}.$

205. (МСИ, 1980 г.; МТИМБО, 1981 г.). $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}.$

206. (МСИ, 1980 г.). $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1).$

207. (ПГУ, 1980 г.). $\log_3\sqrt{130-7^{\log_x(6-x)}}=2.$

208. (МСИ, 1977 г.; МТИМБО, 1981 г.). $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=$
$=1+\lg(2^{x-2}+1).$

209. (МГРИ, 1977 г.). $\log_2(4^{x+1}+4)\cdot\log_2(4^x+1)=\log_{1/\sqrt{2}}\sqrt{1/8}.$

210. (МГРИ, 1977 г.). $\log_2(2x^2)\cdot\log_2(16x)=\frac{9}{2}\log_2^2 x.$

211. (МИНХ, 1979 г.). $\lg 4+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3=\lg(\sqrt[x]{3}+27).$

212. (МИЭТ, 1977 г.). $\lg(x^3+27)-0,5\lg(x^2+6x+9)=3\lg\sqrt[3]{7}.$

213. (МИИГАиК, 1978 г.). $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

214. (МИТХТ, 1979 г.). $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3.$

215. (МАТИ, 1979 г.). $x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}}=\sqrt[3]{10}.$

216. (МАТИ, 1979 г.). $|x-10|\log_2(x-3)=2(x-10).$

217. (МИРЭА, 1978 г.; МТИМБО, 1982 г.). $\log_4\log_2 x+$
$+\log_2\log_4 x=2.$

218. (МАТИ, 1979 г.). $(6x-5)|\ln(2x+2,3)|=8\ln(2x+2,3).$

219. (МИИГАиК, 1976 г.). $\sqrt{\log_9(9x^8)\cdot\log_3(3x)}=\log_3 x^3.$

220. (МВТУ, 1977 г.). $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg^2 x=6.$

221. (МАДИ, 1980 г.). $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}.$

222. (МФТИ, 1977 г.). $\lg^2(4-x)+\lg(4-x)\cdot\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)=$
$=2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right).$

223. (МФТИ, 1977 г.). $2\log_2\frac{x-7}{x-1}+\log_2\frac{x-1}{x+1}=1.$

224. (МГУ, эконом. фак., 1979 г.). $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+$
$+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$

225. (УжГУ, 1980 г.). $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}.$

226. (РИИГА, 1981 г.). $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3.$

227. (МИИГАиК, 1980 г.). $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$.

228. (МАРХИ, 1979 г.). $\lg(6\cdot 5^x+25\cdot 20^x)=x+\lg 25$.

229. (МОПИ, 1980 г.). $\sqrt{\log_2 x}-0{,}5=\log_2\sqrt{x}$.

230. (РГУ, 1980 г.). $\log_{1/3}(2(1/2)^x-1)=\log_{1/3}((1/4)^x-4)$.

231. (ЛГПИ, 1979 г.). $\log_6\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\log_6(x-11)=1$.

232. (МСИ, 1980 г.). $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2$.

233. (КГУ, кибернетика, 1979 г.). $\log_7 2+\log_{49}x=\log_{1/7}\sqrt{3}$.

234. (МИФИ, 1978 г.). $(\log_{\sin x}2)\cdot(\log_{\sin^2 x}a)+1=0$.

235. (МИФИ, 1976 г.). $\log_{\sqrt{x}}a\cdot\log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right)=1$.

236. (МИФИ, 1977 г.). $\sqrt{(\log_{0,04}x)+1}+\sqrt{(\log_{0,2}x)+3}=1$.

237. (МИФИ, 1978 г.). $\log_{3x}(3/x)+\log_3^2 x=1$.

238. (МИФИ, 1977 г.). $\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}+\frac{\log_a x}{\log_a 2}=\frac{1}{\log_{(a^2-1)}2}$.

239. (МИФИ, 1977 г.). $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}}a}{\log_{2x}a}+\log_{ax}a\cdot\log_{1/a}2x=0$.

240. (МИФИ, 1979 г.). $\log_4(x+12)\log_x 2=1$.

241. (ЛГУ, геофак, 1980 г.). $2^{\sqrt{\log_2 x-2}}+2^{-\sqrt{\log_2 x-2}}=1$.

242. (МИФИ, 1978 г.). $\log_{0,1}\sin 2x+\lg\cos x-\lg 7=0$.

243. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_2(3-x)-\log_2\frac{\sin(3\pi/4)}{5-x}=\frac{1}{2}+$ $+\log_2(x+7)$.

244. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_4(2+\sqrt{x+3})=2\cos(5\pi/3)$.

245. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_{1/5}(2x+5)=\log_{1/5}(16-x^2)+$ $+\operatorname{tg}(5\pi/4)$.

246. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_{1/3}\sqrt{x^2-2x}=\sin(11\pi/6)$.

247. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

248. (МТИМБО, 1982 г.). $\lg 10+\frac{1}{3}\lg(3^{2\sqrt{x}}+271)=2$.

249. (МТИМБО, 1982 г.). $2\log_3 x+\log_3(x^2-3)=\log_3 0{,}5+$ $+5^{\log_5(\log_3 8)}$.

250. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_5(3^x+10)+7{,}1^0=\log_5(9^x+56)$.

251. (МТИМБО, 1982 г.). $(\log_4 x-2)\cdot\log_4 x=\frac{3}{2}(\log_4 x-1)$.

252. (МТИМБО, 1981 г.). $\log_5 x+\log_{25}x=\log_{1/5}\sqrt{3}$.

253. (МТИМБО, 1981 г.). $\lg(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}})=0$.

254. (МТИМБО, 1981 г.). $\log_2(9-2^x)=3-x$.

255. (МТИМБО, 1981 г.). $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$.

256. (МТИМБО, 1981 г.). $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}}3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}$.

257. (МТИМБО, 1981 г.). $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{x^{-1}}=2$.
258. (МТИМБО, 1982 г.). $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.
259. (МТИМБО, 1982 г.). $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$.
260. (МТИМБО, 1979 г.). $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\dfrac{1}{\log_{4/3}(2-2x^2)}$.
261. (МТИМБО, 1979 г.). $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.
262. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1977г.). При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x-|\log_3 x|+a=0$ имеет четыре решения?

Логарифмические неравенства

Решите неравенства (**263—381**).
263. (МАТИ, 1979 г.). $\log_{1/3}(5x-1)>0$.
264. (МИИЗ, 1979 г.). $\log_5(3x-1)<1$.
265. (МПИ, 1979 г.). $\log_{0,5}(1+2x)>-1$.
266. (МИНХ, 1979 г.). $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$.
267. (МЭИ, 1978 г.). $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$.
268. (БГПИ, 1980 г.). $\lg(x^2-5x+7)<0$.
269. (МИЭТ, 1977 г.). $\log_7((2x-6)/(2x-1))>0$.
270. (МАДИ, 1979 г.). $\log_{1,5}((2x-8)/(x-2))<0$.
271. (МИСиС, 1979 г.). $\log_3((1-2x)/x)\leqslant 0$.
272. (МТИЛП, 1979 г.). $\log_{1/3}((2-3x)/x)\geqslant -1$.
273. (МИСиС, 1978 г.). $\log_{1/4}((35-x^2)/x)\geqslant -1/2$.
274. (МТИ, 1976 г.). $\log_3|3-4x|>2$.
275. (МАДИ, 1977 г.). $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\leqslant 0$.
276. (МВТУ, 1976 г.). $|\log_3 x|-\log_3 x-3<0$.
277. (МИНХ, 1979 г.). $\log_2 x\leqslant\dfrac{2}{\log_2 x-1}$.
278. (МИСиС, 1978 г.). $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}<1$.
279. (МИЭТ, 1978 г.). $\dfrac{1}{1+\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>2$.
280. (БорПИ, 1980 г.). $\log_{1/4}(2-x)>\log_{1/4}(2/(x+1))$.
281. (МФТИ, 1980 г.). $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 1$.
282. (МАИ, 1979 г.). $\dfrac{1}{\log_4((x+1)/(x+2))}<\dfrac{1}{\log_4(x+3)}$.
283. (МАИ, 1979 г.). $\log_{3x+5}(9x^2+8x+8)>2$.
284*. (МГУ, эконом. фак., 1979 г.).

$$\frac{\log_5(x^2-4x+11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}}\geqslant 0.$$

285. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\log_3((1+2x)/(1+x))<1$.
286. (МГМИ, 1980 г.). $3^{\log_3\sqrt{x-1}}<3^{\log_3(x-6)}+3$.

287. (МИЭТ, 1977 г.). $\log_{0,2}(x^2-x-2) > \log_{0,2}(-x^2+2x+3)$.

288. (УжГУ, 1980 г.). $\log_{1/6}(x^2-3x+2)+1<0$.

289. (УжГУ, 1980 г.). $\log_2(x^2-2x)-3>0$.

290. (ВГУ, физфак, 1980 г.). $\log_{1/3}(3x+4) > \log_{1/3}(x^2+2)$.

291. (МАМИ, 1979 г.). $(1/2)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

292. (МВТУ, 1979 г.). $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$.

293. (МТМИ, 1980 г.). $\log_{0,5}\sqrt{(x-4)/(x+3)} < \log_{0,5} 2$.

294. (МИНХ, 1978 г.). $\log_{0,5}(x^2-3x+4)-\log_{0,5}(x-1)<-1$.

295. (ПГУ, 1980 г.). $\log_{0,5}(3x-4) < \lg_{0,5}(x-2)$.

296. (МГУ, 1977 г.). $\log_{0,5}(4-x) \geqslant \log_{0,5} 2-\log_{0,5}(x-1)$.

297. (МГПИ, 1980 г.). $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$.

298. (КГУ, РФФ, 1980 г.). $1+\log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$.

299. (МГУ, химфак, 1977 г.). $\log_{1/3}(2^{x+2}-4^x) \geqslant -2$.

300. (МГУ, химфак, 1978 г.). $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x) \geqslant -2$.

301. (МАТИ, 1976 г.). $\log_{1/3}[\log_4(x^2-5)] > 0$.

302. (МИРЭА, 1976 г.). $\log_{0,5}[\log_6((x^2+x)/(x+4))] < 0$.

303. (МИРЭА, 1977 г.). $\log_{0,1}[\log_2((x^2+1)/|x-1|)] < 0$.

304. (МАДИ, 1978 г.). $\log_x[\log_9(3^x-9)] < 1$.

305. (МИИГАиК, 1980 г.). $\log_{0,5}\log_8((x^2-2x)/(x-3)) < 0$.

306. (МГМИ, 1979 г.). $\dfrac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}} < 0$.

307. (МГМИ, 1979 г.). $\dfrac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{-2-6x}} < 0$.

308. (МИСиС, 1977 г.). $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0$.

309. (КГУ, 1979 г.). $\dfrac{x^2-4}{\log_{1/2}(x^2-1)} < 0$.

310. (МИЭТ, 1980 г.). $\log_3 \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0$.

311. (МИЭТ, 1980 г.). $\log_{x^2}((4x-5)/|x-2|) \geqslant 1/2$.

312. (МИФИ, 1978 г.). $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geqslant 1$.

313. (МИФИ, 1979 г.). $\log_{1/3}(x+1) > \log_3(2-x)$.

314. (МИФИ, 1979 г.). $\log_{1/5}(x^2-6x+18)+2\log_5(x-4)<0$.

315. (ПГУ, 1980 г.). $\log_{1/3} x > \log_x 3-\dfrac{5}{2}$.

316. (БашГУ, 1980 г.). $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2) > -2$.

317. (ЯГУ, 1980 г.). $\log_4(18-2^x)\cdot\log_2((18-2^x)/8) \leqslant -1$.

318. (МИФИ, 1978 г.). $\log_5(x-3)+\dfrac{1}{2}\log_5 3 < \dfrac{1}{2}\log_5(2x^2-6x+7)$.

319. (МГИ, 1979 г.). $\log_2(2x-1) > \log_{1/\sqrt{2}} 2$.

320. (МЭИ, 1977 г.). $\log_{4/3}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{4/9}(2/3) \geqslant 0$.

321. (МГУ, 1975 г.). $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

322. (МИУ, 1978 г.). $\log_5 \sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1$.

323. (ТГУ, 1981 г.). $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$.

324. (МИСиС, 1979 г.). $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/9}\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)} \leqslant 1$.

325. (МИСиС, 1979 г.). $\log_{0,5}^2 x + 6 \geqslant 5\log_{0,5} x$.

326. (ЯГУ, 1980 г.). $(1/10)^{\log_{x-3}(x^2-4x+3)} \geqslant 1$.

327. (МГМИ, 1980 г.). $\log_2^2((4x-3)/(4-3x)) > -1/2$.

328. (МИУ, 1978 г.). $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

329. (МИХМ, 1976 г.). $\log_x(x^3-x^2-2x) < 3$.

330. (МТИ, 1978 г.). $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

331. (МАИ, 1979 г.). $\log_{(x-3)}(2(x^2-10x+24)) \geqslant \log_{(x-3)}(x^2-9)$.

332. (МАИ, 1979 г.). $\log_{(x-\sqrt{2})}((x+7)/(x-2)) \leqslant \log_{(x-\sqrt{2})} 2x$.

333. (МАИ, 1979 г.). $\log_{(x-4,5)}((x+4)/(2x-6)) \leqslant \log_{(x-4,5)}(x-5)$.

334. (МИЭТ, 1979 г.). $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geqslant 1$.

335. (МИЭТ, 1980 г.). $\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

336. (МИТХТ, 1979 г.). $\log_{\log_2(0,5x)}(x^2-10x+22) > 0$.

337. (МАИ, 1979 г.). $\log_{(x+6)/3}(\log_2((x-1)/(2+x))) > 0$.

338. (МИЭТ, 1979 г.). $\log_{3x/(x^2+1)}(x^2-2,5x+1) \geqslant 0$.

339. (МИЭТ, 1980 г.). $\log_{x^2}(2+x) < 1$.

340. (МГУ, биофак, 1979 г.). $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leqslant 1/2$.

341. (КГУ, мехмат, 1980 г.). $\log_{1/x}(2,5x-1) \geqslant -2$.

342. (КГУ, мехмат, 1980 г.). $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$.

343. (МАМИ, 1979 г.). $(1/2)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

344. (МАДИ, 1976 г.). $(2/5)^{\log_{0,25}(x^2+5x+8)} \leqslant 2,5$.

345. (ЛГУ, 1980 г.). $2^{\log_{2-x}(x^2+8x+15)} < 1$.

346. (МИИГАиК, 1977 г.). $(0,5)^{\log_5\log_{0,3}(x-0,7)} < 1$.

347. (МГИ, 1979 г.). $(0,5)^{\log_{1/3}((x+5)/(x^2+3))} > 1$.

348. (МИНХ, 1979 г.). $(0,5)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} < 1$.

349. (МАМИ, 1979 г.). $\log_2(\sin(x/2)) < -1$.

350. (МГУ, 1978 г.). $\log_4(3^x-1)\log_{1/4}\frac{3^x-1}{16} \leqslant \frac{3}{4}$.

351. (МИТХТ, 1979 г.). $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x\,(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

352. (БашГУ, 1980 г.). $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$.

353. (РГУ, физфак, 1977 г.; МИФИ, 1978 г.). $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \frac{1}{2}$.

354. (КГУ, ММФ, 1977 г.). $\sqrt{\log_{1/2}^2 x + 4\log_2\sqrt{x}} < \sqrt{2}(4-\log_{16} x^4)$.

355. (РГУ, 1981 г.). $\log_{(x+3)/(x-3)} 4 < 2\left(\log_{1/2}(x-3) - \log_{\sqrt{2}/2} \sqrt{x+3}\right)$.

356. (МИСиС, 1978 г.). $\sqrt{\log_2((3-2x)/(1-x))} < 1$.

357. (МИФИ, 1976 г.). $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geqslant 2$.

358. (МИФИ, 1978 г.). $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x-1} > 2$.

359. (МВТУ, 1976 г.). $\log_3 \frac{2^x-5}{27} \cdot \log_{1/3}(2^x-5) < 2$.

360. (КГУ, 1979 г.). $(x/10)^{\lg x - 2} < 100$.

361. (МАИ, 1976 г.). $\frac{1}{\log_3(x+1)} < \frac{1}{2\log_9 \sqrt{x^2+6x+9}}$.

362. (МТИМБО, 1979 г.). $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$.

363. (МИТХТ, 1979 г.). $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$.

364. (МИФИ, 1978 г.). $\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$.

365. (МИФИ, 1982 г.). $2\log_5(x-3d+2) - \log_{\sqrt{5}}(x+2d-8) \leqslant 4$.

366. (МИФИ, 1980 г.). $\frac{1}{5-\log_a x} + \frac{2}{1+\log_a x} < 1$.

367. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). $\lg^4 x - 13\lg^2 x + 36 > 0$.

368. (МТИМБО, 1980 г.). $\log_{1/2}\left(\log_2 \frac{x}{1+x}\right) > 0$.

369. (РГУ, мехмат, спец. математика, механика, 1977 г.). $\log_2 x^2 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$.

370. (МИИВТ, 1982 г.). $\lg^2 x \geqslant \lg x + 2$.

371. (РГУ, мехмат, вечерн. отд., 1977 г.). $\log_{1/3} x + 2\log_{1/9}(x-1) \leqslant \log_{1/3} 6$.

372. (МИФИ, 1979 г.). $\frac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$.

373. (ЛГУ, 1979 г.). $\log_a(1-8a^{-x}) \geqslant 2(1-x) \quad (a \in \boldsymbol{R})$.

374. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). $2\log_{1/2}(x-1) \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{\log_{(x^2-x)} 8}$.

375. (РГУ, 1980 г.). $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 2) > 2$.

376. (НГУ, мехмат, 1979 г.). $\log_{x^2+2x-3} \frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0$.

377. (БГУ, мехмат, 1979 г.). $(\log_{1/2} x)^2 - \log_{1/2} x^2 > (\log_{1/2} 3)^2 - 1$.

378. (РГУ, мехмат, спец. математика, механика, 1977 г.). $\log_2(x+14) + 2\log_4(x+2) < 2\log_{1/2}(1/8)$.

379. (РГУ, мехмат, вечерн. отд., 1977 г.). $\log_{1/4}(x+1) \geqslant -2\log_{1/16} 2 + \log_{1/4}(x^2+3x+8)$.

380. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). $\log_{1/2} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$.

381. (МТИМБО, 1981 г.). $\log_{0,5}\log_5(x^2-4)>\log_{0,5}1$.

382. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). $\log_{1/4}x^2+\frac{1}{\log_{(x-1)}(1/2)}\geqslant\log_{1/2}2$.

383. (МИИВТ, 1982 г.). $\log_2\frac{3x-1}{2-x}<1$.

384. (МТИМБО, 1980 г.). $\log_{0,5}(x+5)^2>\log_{1/2}(3x-1)^2$.

385. (МИЭТ, 1980 г.). Известно, что неравенство $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+2x+3)$ выполняется при $x=9/4$. Найдите все решения этого неравенства.

Системы показательных и логарифмических уравнений

Решите системы уравнений (**386**—**427**).

386. (МТИМБО, 1982 г.). $\begin{cases}\lg\sqrt{5-x}+\lg 2=\lg(x+3),\\ x^2+7x-8=0.\end{cases}$

387. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\begin{cases}4^{x+y}=128,\\ 5^{3x-2y-3}=1.\end{cases}$

388. (МИХМ, 1979 г.). $\begin{cases}4^{(x-y)^2-1}=1,\\ 5^{x+y}=125.\end{cases}$

389. (МИХМ, 1976 г.). $\begin{cases}3^{2x}-2^y=77,\\ 3^x-2^{y/2}=7.\end{cases}$

390. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases}2^x+2^y=12,\\ x+y=5.\end{cases}$

391. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$

392. (МЭСИ, 1979 г.). $\begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=2{,}75,\\ 2^x-3^y=-0{,}75.\end{cases}$

393. (МАТИ, 1979 г.). $\begin{cases}7^x-16y=0,\\ 4^x-49y=0.\end{cases}$

394. (МАИ, 1979 г.). $\begin{cases}4^{x/y}-3\cdot 4^{(5y-x)/y}=16,\\ \sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{12}-\sqrt{8}.\end{cases}$

395. (МИУ, 1979 г.). $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

396. (ПГУ, 1980 г.). $\begin{cases}\log_4 x-\log_x y=7/6,\\ xy=16.\end{cases}$

397. (МСИ, 1978 г.). $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

398. (МИИЖТ, 1979 г.). $\begin{cases}x^{\lg y}=2,\\ xy=20.\end{cases}$

399. (МАТИ, 1979 г.). $\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3, \\ x^2 + y^4 = 16. \end{cases}$

400. (ВЗИТиЛП, 1980 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{15}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5. \end{cases}$

401. (МЭИ, 1978 г.). $\begin{cases} x + y = 4 + \sqrt{y^2 + 2}, \\ \lg x - 2\lg 2 = \lg\left(1 + \dfrac{1}{2}y\right). \end{cases}$

402. (МИХМ, 1978 г.). $\begin{cases} 8^{\log_9 (x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7\cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$

403. (МИХМ, 1978 г.). $\begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_{\sqrt{2}} 2, \\ \log_2 y = 8 - \log_{\sqrt{2}} x. \end{cases}$

404. (МТИММП, 1978 г.). $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = 3\lg 2. \end{cases}$

405. (КазанГУ, физфак, 1978 г.). $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{9}{8}, \\ \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

406. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\begin{cases} \lg\sqrt{(x + y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2. \end{cases}$

407. (МВТУ, 1977 г.). $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2}y, \\ \log_3 (x + 2y) + \log_{1/3} (x - 2y) = 1. \end{cases}$

408. (МИУ, 1979 г.). $\begin{cases} 3\cdot(2/3)^{2x-y} + 7\cdot(2/3)^{(2x-y)/2} - 6 = 0, \\ \lg(3x - y) + \lg(y + x) = 4\lg 2. \end{cases}$

409. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 625^3. \end{cases}$

410. (ЛГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x}. \end{cases}$

411. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} xy = a^2, \\ (\lg x)^2 + (\lg y)^2 = \dfrac{5}{2}(\lg a^2)^2. \end{cases}$

412. (МИФИ, 1979 г.). $\begin{cases} 2^x\cdot 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + 0{,}5 = \dfrac{1}{2}\log_3 (9y). \end{cases}$

413. (ТРТИ, 1980 г.). $\begin{cases} 10^{3-\lg(x-y)} = 250, \\ \sqrt{x - y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x + y} = \dfrac{26 - y}{\sqrt{x - y}}. \end{cases}$

414. (РПИ, 1980 г.). $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8. \end{cases}$

415. (МИХМ, 1977 г.). $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2, \\ 3 + 2\log_2 y = \log_2 5\,(2 + 3\log_5 x). \end{cases}$

416. (МИЭМ, 1976 г.). $\begin{cases} \log_2 (x-y) = 5 - \log_2 (x+y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

417. (МИНХ, 1978 г.). $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = -2\log_{1/2} 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5\lg 10. \end{cases}$

418. (МИНХ, 1978 г.). $\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5, \\ xy = 8. \end{cases}$

419. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

420. (ЛГПИ, 1979 г.; КГУ, химфак, 1978 г.).

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27. \end{cases}$$

421. (МЭИ, 1980 г.). $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y + \log_2 (y+1) = 1 + \log_2 3, \\ 2^{y^2} - 2^x \cdot 16^y = 0. \end{cases}$

422. (КГУ, физфак, 1980 г.). $\begin{cases} \log_3 (\log_2 x) + \log_{1/3}(\log_{1/2} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$

423. (КГУ, ВМК, 1979 г.). $\begin{cases} \log_x (xy) = \log_y x^2, \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3. \end{cases}$

424. (МФТИ, 1981 г.). $\begin{cases} 2\log_4 (y+1) + \log_2 y = \log_2 \left(\dfrac{x}{y} - 2\right), \\ 5 + \log_2 \dfrac{y}{x} = \dfrac{6}{\log_2 \dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

425. (МТИМБО, 1982 г.). $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x-y) = 1 - \log_3 (x+y). \end{cases}$

426. (МТИМБО, 1980 г.). $\begin{cases} 0{,}5 \cdot \log_2 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

427. (МТИМБО, 1979 г.). $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y-x) = 4. \end{cases}$

§ 10. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные формулы.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ (1)

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$ (2)

$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$ (3)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}. \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}. \quad (9)$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \quad (10)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha. \quad (11)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha,\ 2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}. \quad (12)$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha. \quad (13)$$

Вывод: $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$ $=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\times$ $\times\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha. \quad (14)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (15)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (16)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (17)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (18)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)). \quad (19)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \quad (20)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)). \quad (21)$$

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha. \quad (22)$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha. \quad (23)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \quad (24)$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \quad (25)$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \quad (26)$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \quad (27)$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\qquad \alpha\neq\pi+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}. \quad (28)$$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)},\qquad \alpha\neq\pi+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}. \quad (29)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \qquad \alpha\neq\pi+\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad \alpha\neq\pi+2\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{31}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \alpha\neq\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{32}$$

$$|\sin\alpha|=\frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{33}$$

$$|\sin\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \qquad \alpha\neq\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{34}$$

$$|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{35}$$

$$|\cos\alpha|=\frac{|\operatorname{ctg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \qquad \alpha\neq\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}. \tag{36}$$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha), \qquad a^2+b^2\neq 0, \tag{37}$$

где

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Докажите тождества (**1—60**).

1. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\dfrac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,\dfrac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

2. (МИЭТ, 1977 г.). $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1.$

3. (ВГУ, физфак, 1980 г.). $\dfrac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right).$

4. (МИХМ, 1979 г.). $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\cos 2\alpha.$

5. (МТИММП, 1977 г.). $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

6. (МИЭТ, 1977 г.). $\dfrac{\cos^2\beta\,(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)}{\sec^2\alpha}=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

7. (БГУ, 1979 г.). $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

8. (МАИ, 1977 г.).
$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$

9. (МТИММП, 1977 г.). $(1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\beta)\sin 2\beta=\operatorname{tg}2\beta.$

10. (МАТИ, 1976 г.).
$\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos(3\alpha/2)\cos\alpha\sin(\alpha/2).$

11. (МИХМ, 1977 г.). $\dfrac{\sin^2 4\alpha}{2\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=2\sin\alpha\sin 2\alpha.$

12. (МСИ, 1976 г.). $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha.$

13. (МИЭТ, 1977 г.). $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha.$

14. (МАТИ, 1977 г.). $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

15. (МИЭТ, 1977 г.).
$\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha.$

16. (МАИ, 1979 г.). $\dfrac{(\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=2\sin 2\alpha.$

17. (МЭИ, 1979 г.).
$$\left(\frac{\operatorname{tg}^2((\alpha-\pi)/4)-1}{\operatorname{tg}^2((\alpha-\pi)/4)+1}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg} 4\alpha\right)\sec\frac{9}{2}\alpha=\operatorname{cosec} 4\alpha.$$

18. (МАТИ, 1977 г.). $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

19. (МГПИ, 1978 г.). $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\operatorname{tg} 3x.$

20. (МГПИ, 1978 г.).
$1-\cos(2x-\pi)-\cos(4x+\pi)+\cos(6x-2\pi)=4\cos x\cos 2x\cos 3x.$

21. (МГПИ, 1978 г.) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\sin 2x.$

22. (УжГУ, 1980 г.). $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.$

23. (ВильнГУ, 1980 г.). $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}(\alpha/2)}+\cos(\pi-\alpha)=1.$

24. (МАТИ, 1980 г.). $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha.$

25. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=1.$

26. (ВГУ, геофак, 1980 г.). $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right).$

27. (РПИ, 1980 г.). $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right).$

28. (БГПИ, 1980 г.). $\dfrac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

29. (МИХМ, 1977 г.).
$$\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\sin^3\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}=\sin^2 x.$$

30. (МАТИ, 1979 г.). $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

31. (МИХМ, 1977 г.). $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1.$

32. (МИЭТ, 1977 г.). $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$

33. (МИХМ, 1977 г.). $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}=2\operatorname{ctg} 2\alpha.$

34. (МЭИ, 1977 г.).
$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\alpha+\cos(90^\circ+3\alpha)+\sin 5\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec} 4\alpha.$$

35. (МАТИ, 1977 г.). $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

36. (МИТХТ, 1979 г.). $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha$.

37. (МАТИ, 1977 г.). $1+2\cos 7a=\frac{\sin 10{,}5a}{\sin 3{,}5a}$.

38. (МТИМБО, 1980 г.).

$$(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$$

39. (МИЭТ, 1977 г.). $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$.

40. (МТИММП, 1977 г.; МТИМБО, 1979 г.).

$$\frac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

41. (МТИММП, 1977 г.). $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

42. (МТИММП, 1977 г.).

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+1=\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

43. (МАТИ, 1979 г.). $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$.

44. (МИХМ, 1977 г.). $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

45. (МИХМ, 1977 г.). $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha$.

46. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, $\pi<\alpha<2\pi$.

47. (МИЭТ, 1977 г.). $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0$.

48. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sec^2 x+2}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\frac{2}{\operatorname{tg}x+1}$.

49. (МАТИ, 1979 г.). $\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

50. (ЛьвГУ, 1980 г.). $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(7\alpha/2)$.

51. (ЛьвГУ, 1980 г.). $\frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

52. (ЛатвГУ, 1980 г.). $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

53. (МТИМБО, 1980 г.). $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\frac{(3+\cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha}{4}$.

54. (МТИМБО, 1979 г.).

$$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$$

55. (МТИМБО, 1980 г.).

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}-2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)=2\cos 2\alpha.$$

56. (МТИМБО, 1979 г.). $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

57. (МТИМБО, 1980 г.). $\dfrac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right).$

58. (МТИМБО, 1979 г.). $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\sin\alpha.$

59. (МТИМБО, 1980 г.). $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin(4\alpha+30^\circ)}{\sin(4\alpha-30^\circ)}.$

60. (МТИМБО, 1979 г.). $1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$

Упростите следующие выражения (**61—79**).

61. (МТИМБО, 1980 г.). $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}.$

62. (МТИМБО, 1979 г.). $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}.$

63. (МТИМБО, 1980 г.). $3\cos^2 x-4\sin x\cos x-\sin^2 x-1.$

64. (МТИМБО, 1977 г.).

$$4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right).$$

65. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\dfrac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}.$

66. (МАМИ, 1979 г.). $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)}.$

67. (МАТИ, 1979 г.). $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\sec^2 2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\operatorname{cosec}^2 2\alpha-1}.$

68. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}.$

69. (МТИММП, 1976 г.). $4\cos^4\alpha-2\cos 2\alpha-\dfrac{1}{2}\cos 4\alpha.$

70. (ЛГПИ, 1979 г.).

$$\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

71. (МТИММП, 1976 г.).

$$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}.$$

72. (МХТИ, 1977 г.). $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}-\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha}.$

73. (МХТИ, 1977 г.). $\dfrac{1+\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}.$

74. (МИЭТ, 1977 г.). $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{4\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$

75. (КолПИ, 1980 г.). $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}.$

76. (ОГУ, 1980 г.). $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha.$

77. (МТИММП, 1980 г.). $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

78. (РПИ, 1980 г.). $\sin^2\alpha\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

79. (МГМИ, 1980 г.). $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

Вычислите без таблиц (80—105).

80. (МХТИ, 1977 г.). $\cos 67°30'$ и $\cos 75°$.

81. (МЭСИ, 1977 г.). $4(\cos 24°+\cos 48°-\cos 84°-\cos 12°)$.

82. (МЭСИ, 1977 г.). $\frac{96\sin 80°+\sin 65°\sin 35°}{\sin 20°+\sin 50°+\sin 110°}$.

83. (МЭСИ, 1977 г.). $128\sin^2 20°\sin^2 40°\sin^2 60°\sin^2 80$.

84. (МГИ, 1977 г.). $\operatorname{tg} 20°\operatorname{tg} 40°\operatorname{tg} 80°$.

85. (МИИГАиК, 1977 г.). $\frac{\operatorname{ctg} 15°+1}{2\operatorname{ctg} 15°}$.

86. (МИЭТ, 1977 г., МТИМБО, 1979 г.). $\cos 10°\cos 50°\cos 70°$.

87. (ТартГУ, 1980 г.). $\sin 160°\cos 110°+\sin 250°\cos 340°+\operatorname{tg} 110°\operatorname{tg} 340°$.

88. (МИФИ, 1976 г.). $\operatorname{tg} 9°-\operatorname{tg} 63°+\operatorname{tg} 81°-\operatorname{tg} 27°$.

89. (МЭСИ, 1980 г.). $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

90. (МГМИ, 1980 г.).

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{6\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha \text{ при } \alpha=\frac{3\pi}{16}.$$

91. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1978 г.).

$$\frac{\sin 110°\sin 250°+\cos 540°\cos 290°\cos 430°}{\cos^2 1260°}.$$

92. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1980 г.). Проверьте равенство $\frac{1}{\cos 290°}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250°}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

93. (МТИМБО, 1982 г.). Проверьте $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

94. (МТИМБО, 1980 г.). Проверьте $\cos 20°+2\sin^2 55°=1+\sqrt{2}\sin 65°$.

95. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1982 г.). Вычислите $(\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha)\cos\alpha$, если $\sin\alpha=1/4$.

96. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1980 г.). Дано: $20\sin^2\alpha+21\cos\alpha-24=0$, $7\pi/4<\alpha<2\pi$. Найдите $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

97. (БашГУ, 1980 г.). $\frac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

98. (МХТИ, 1977 г.). $\sin 2\alpha$, если $\sin(\alpha/2)+\cos(\alpha/2)=-1/2$ и α принадлежит IV четверти.

99. (МХТИ, 1977 г.). $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=a$.

100. (МАИ, 1979 г.). $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-9/41$, $\pi<\alpha<3\pi/2$.

101. (МИИЗ, 1979 г.). $\cos(\alpha/2)$, если $\sin\alpha=-12/13$, $\pi<\alpha<3\pi/2$.

102. (РПИ, 1980 г.). $\sin(\alpha/2)$, если $\sin\alpha=-5/13$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

103. (ГомГУ, прикладная матем., 1980 г.). $\sin(\alpha/2)$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\pi/2$.

104. (ЯГУ, 1980 г.). $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

105. (ЛьвГУ, 1980 г.). $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

Преобразуйте в произведение (**106—112**).

106. (МЭИ, 1977 г.). $\sec\alpha-\cos\alpha+\sec 60^\circ\cos 2\alpha\sin 3\alpha-\sin 5\alpha$.

107. (МТИММП, 1976 г.). $\sin\alpha+\sin 60^\circ+\sin(\alpha+60^\circ)$.

108. (МТИ, 1979 г.). $\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)+\sin 2\alpha$.

109. (МЭИ, 1978 г.). $\sin\dfrac{5}{2}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin 3\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{4}$.

110. (МЭИ, 1978 г.). $4\cos 11\alpha+(\sin 8\alpha-\sin 10\alpha-\sin 12\alpha+\sin 14\alpha)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha$.

111. (МЭИ, 1979 г.). $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta-\dfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\sec^2\alpha\sec^2\beta$.

112. (МАИ, 1978 г.). $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}+[\cos(\alpha-\beta)\sec(\alpha+\beta)+1]^{-1}$.

Обратные тригонометрические функции

Вычислите (**113—126**).

113. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $\operatorname{arctg}1+\arccos(-1/2)+\arcsin(-1/2)$.

114. $\arcsin(-\sqrt{2}/2)+\arccos(-1/2)-\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arcctg}(-1/\sqrt{3})$.

115. (МЭСИ, 1980 г.). $\operatorname{arcctg}[\operatorname{tg}(-37^\circ)]$.

116. (МАТИ, 1980 г.). $\arccos(\cos(-\sqrt{3}/2))$.

117. (МИФИ, 1979 г.). $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$.

118. $\sin(2\arcsin(3/5))$.

119. $\cos(2\arcsin(2/5))$.

120. $\sin(2\operatorname{arctg}3)$.

121. $\cos(2\operatorname{arctg}2)$.

122. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{9}\right)$.

123. $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{8}\right)$.

124. (МИЭТ, 1976 г.). $\sin(2\operatorname{arctg}(1/3))+\cos(\operatorname{arctg}2\sqrt{2})$.

125. (МТИММП, 1977 г.). $\sin(\arcsin(3/5)-\arccos(3/5))$.

126. (МАТИ, 1980 г.). $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{4}{5}+\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Докажите (**127—132**).

127. $\sin(\arcsin x)=x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

128. $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

129. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

130. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 1$.

131. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

132. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$.

Упростите выражения (**133—141**).

133. $\sin(\arccos 3/5)$.

134. $\cos(\arcsin 4/5)$.

135. $\sin(\operatorname{arctg} 2)$.

136. $\cos(\operatorname{arctg} 2)$.

137. $\arcsin(\sin(8\pi/7))$.

138. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(10\pi/7))$.

139. $\arcsin(\sin(6\pi/7))$.

140. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6\pi/7))$.

141. $\arccos(\cos(6\pi/7))$.

142. Выразите $\arcsin(5/13)$ через значения всех обратных тригонометрических функций.

Решите уравнения (**143—145**).

143. $6\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

144. $4\arcsin x + \arccos x = \pi$.

145. $5\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = 2\pi$.

146. (ГомГУ, 1980 г.). Постройте график $y = \arcsin(\cos x)$.

147. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Решите неравенство $\arcsin(\sin 5) > x^2 - 4x$.

§ 11. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Решение простейших тригонометрических уравнений

Пример 1. $\sin x = m$, $|m| \leqslant 1$.

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. $\cos x = m$, $|m| \leqslant 1$.

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. $\operatorname{tg} x = m$, $m \in \boldsymbol{R}$.

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. $\operatorname{ctg} x = m$, $m \in \boldsymbol{R}$.

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание 1. В приведенных простейших примерах запись решений имеет простую и однозначную форму. В более сложных примерах *форма записи* множества решений не однозначна, но идентичность различных форм записи всегда можно доказать при помощи тождественных преобразований. Различная форма записи обычно объясняется различными методами, при помощи которых решалась данная задача. Например, в задаче **47** было получено множество решений

$$-\frac{\pi}{4}+(-1)^n \arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\pi n, \qquad n\in \boldsymbol{Z}.$$

При проверке правильности ответа задача была решена другим методом и получили множество решений

$$-\frac{\pi}{4}+(-1)^n \frac{5\pi}{12}+\pi n, \qquad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Это то же самое множество решений; форма же записи другая. Действительно,

$$\arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\arcsin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{12}.$$

Последнее равенство основано на том, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{\pi}{2}$; если бы это неравенство не выполнялось, необходимо было бы воспользоваться формулами приведения.

При самостоятельном решении задач об этом необходимо постоянно помнить. Если у Вас будет другая форма записи множества решений, чем приведенная в разделе «Ответы и методические указания», то необходимо доказать их идентичность. Последнее само по себе является хорошим упражнением.

З а м е ч а н и е 2. При нахождении решения очень часто множество решений тригонометрических уравнений записывается при помощи нескольких формул. Иногда их можно объединить и получится более простая запись ответа. Например, в задаче **187** первоначально множество решений было записано в форме

$$\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{\pi}{3}+\pi m \qquad (n,\ k,\ m\in \boldsymbol{Z}).$$

Это множество решений можно записать и так:

$$\pi n,\quad (-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \qquad (n,\ k\in \boldsymbol{Z}).$$

Разная форма записи множества решений и здесь часто объясняется различными методами решения предложенного уравнения.

З а м е ч а н и е 3. Если в примерах, приведенных в замечаниях 1 и 2, различные формы записи идентичны и окончательная форма записи множества решений (с точки зрения правильности решения) безразлична, то бывает, что одно и то же множество решений дается несколько раз. В этих случаях необходимо в окончательной форме записи эти повторы исключить. Например, при решении задачи **76** получены два множества решений

$$\frac{\pi}{2}+\pi n, \ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5} \qquad (n,\ k\in \boldsymbol{Z}).$$

В данном случае все решения, даваемые первым множеством, как часть входят во второе множество. Действительно, если положить $k=5n+2$ $(n\in \boldsymbol{Z})$, то из второго множества решений выделяется первое множество. В этом случае окончательная запись множества решений будет выглядеть так:

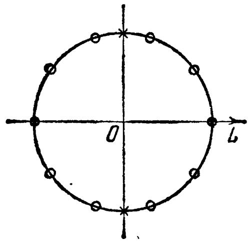
$$\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5} \qquad (k\in \boldsymbol{Z}),$$

т. е. лишнее надо отбросить.

Замечание 4. В случае, если найденные множества решений только частично пересекаются, то эта общая часть в записи окончательного множества решений должна быть приведена лишь один раз без повторений. Так в задаче **81** (при решении ее некоторым методом) получено два множества решений

$$\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi k}{2} \qquad (n,\ k\in \boldsymbol{Z}). \tag{1}$$

Ни одно из этих двух множеств решений не является частью другого, но если мы положим $n=5m$, а $k=2m$ $(m\in \boldsymbol{Z})$, то получим и в первом и во втором случае πm. Следовательно, это множество решений надо в одном из приведенных множеств исключить. Например, во втором множестве все четные значения k надо исключить и оставить только $k=2l+1$ $(l\in \boldsymbol{Z})$. Тогда все решения задачи (и при этом каждое решение только один раз) будут записаны в виде



$$\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi(2l+1)}{2} \qquad (n,\ l\in \boldsymbol{Z}). \tag{2}$$

При другом методе решения эта форма записи множества решений получается непосредственно. Приведение окончательного множества решений в виде (1) считается ошибочным.

Замечание 5. Обнаружение пересечения множеств решений или возможность их объединения легко обнаруживается таким приемом. Рисуется круг и на нем отмечаются кружочками решения, принадлежащие одному множеству решений, а крестиками — другому. На рисунке кружками обозначены решения, принадлежащие множеству $\frac{\pi n}{5}$, а крестиками — решения, принадлежащие множеству $\frac{\pi k}{2}$. Отсчет углов производится от оси L против часовой стрелки. На рисунке видно, что значения 0 и π (и все отличающиеся от них на период) принадлежат как первому, так и второму множеству решений. Таким образом, помимо решений, записанных в форме $\frac{\pi n}{5}$, на круге остались еще две точки $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ (и отличающиеся от них на период). Эти решения можно записать в виде $\frac{\pi}{2}+\pi l$ $(l \in \boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений разложением на множители

Пример 5. (МАИ, 1979 г.). $2\cos x \cos 2x = \cos x$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\cos x(2\cos 2x - 1) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos 2x = 1/2,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{lr} x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n \in \boldsymbol{Z},\\ 2x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \text{ т. е. } x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi k, & k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \pm\frac{\pi}{6}+\pi k\quad (n,\ k \in \boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 6. (МАИ, 1979 г.). $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$.

Решение. Пусть $\cos x = y$. Данное уравнение примет следующий вид: $3y^2 - 10y + 3 = 0$. Решив его, найдем $y_1 = 1/3$, $y_2 = 3$. Значение $y_2 = 3$ не удовлетворяет условию, так как $|\cos x| \leqslant 1$. Следовательно, $\cos x = 1/3$; $x = \pm \arccos(1/3) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\arccos(1/3) + 2\pi n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

Решение однородных и сводящихся к ним уравнений

Уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 7. (МАМИ, 1979 г.). $\cos 3x + \sin 3x = 0$.

Решение. $\sin 3x = -\cos 3x$. Так как значения x, при которых $\cos 3x$ равен нулю, не являются корнями данного уравнения, то разделив обе части исходного уравнения на $\cos 3x$, получим уравнение, равносильное исходному:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = -\frac{\cos 3x}{\cos 3x}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 3x = -1.$$

Отсюда $3x = -\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x = -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

Пример 8. (МГМИ, 1980 г.). $6\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=3$.

Решение. $6\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x-3(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$3\sin^2 x-\sin x\cos x-4\cos^2 x=0.$$

Так как значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ не являются корнями уравнения и $\cos x\neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$$3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-4=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in \boldsymbol{Z},$$

и

$$\operatorname{tg} x=4/3,\quad x=\operatorname{arctg}(4/3)+\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad \operatorname{arctg}(4/3)+\pi k\quad (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

Пример 9. (МИИЗ, 1979 г.). $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

Решение. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}$,

$$\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/4)=1,\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n\quad(n\in\boldsymbol{Z}),\quad x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi n\quad(n\in\boldsymbol{Z}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$.

Пример 10. (МГМИ, 1977 г.). $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1$.

Решение. $\cos(\pi/6)\cos x+\sin(\pi/6)\sin x=1$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$, $x-\frac{\pi}{6}=2\pi n\quad(n\in\boldsymbol{Z})$, $\quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\quad(n\in\boldsymbol{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n\quad(n\in\boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение

Пример 11. (МАТИ, 1979 г.). $\cos 3x+\sin 2x-\sin 4x=0$.

Решение. $\cos 3x+(\sin 2x-\sin 4x)=0$.

Преобразовав выражение в скобках по формуле (16) § 10, будем иметь

$$\cos 3x+(-2\sin x\cos 3x)=0,$$
$$\cos 3x(1-2\sin x)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x=0, \quad \sin x=1/2;$$

следовательно,

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, \quad x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (n,\ k\in \boldsymbol{Z}).$$

Множество решений $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in \boldsymbol{Z})$ целиком содержится в множестве решений $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Поэтому только это множество и остается как множество решений.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 12. (МАТИ, 1979 г.). $\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x$.

Решение. Применим формулу (19) § 10 к обеим частям уравнения:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x),$$

$$\sin 2x-\sin 4x=0.$$

Применив формулу (16) § 10, получим

$$-2\sin x\cos 3x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos 3x=0,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n, \quad n\in \boldsymbol{Z},\\ 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k, \quad k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: πn, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot k$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений с применением формул понижения степени (формул (24) и (25) § 10)

Пример 13. (МВТУ, 1979 г.). $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$.

Решение. $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=1\Rightarrow\cos 2x+\cos 4x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\cos 3x\cos x=0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

а) $\cos 3x=0$, $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

б) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Множество решений уравнения б) является подмножеством множества решений уравнения а), поэтому в ответе запишем лишь корни уравнения а).

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Решение уравнений с применением формул (22) и (23) § 10

Пример 14. (МИЭТ, 1977 г.). $\cos x - 2\sin^2(x/2) = 0$.

Решение. $\cos x - (1-\cos x) = 0 \Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x =$
$= 1/2 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

(формулы (10)—(14) § 10)

Пример 15. (МГУ, мехмат, 1980 г.). $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$.

Решение. Применив формулу (10) § 10 к левой части уравнения, будем иметь $2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x$. Разделить обе части уравнения на $\cos x$ нельзя. Это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$. Перенесем $\sqrt{2}\cos x$ в левую часть. Тогда

$$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos x\,(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sqrt{2}\sin x = 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(n,\ k \in \mathbf{Z})$.

Пример 16. (МИНХ, 1977 г.). $2\sin(x/2)\cos^2 x - 2\sin(x/2)\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобку общий множитель $2\sin(x/2)$:

$$2\sin(x/2)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Заменив выражение $\cos^2 x - \sin^2 x$ согласно формуле (11) § 10 на $\cos 2x$, получим

$$2\sin(x/2)\cos 2x = \cos 2x,$$

или

$$2\sin(x/2)\cos 2x-\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x\,(2\sin(x/2)-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \sin(x/2)=1/2,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, & n\in\boldsymbol{Z},\\ x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k, & k\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, \quad (-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad (n, k\in\boldsymbol{Z})$.

Решение уравнений с помощью замены переменных

а) Уравнения вида $P(\sin x\pm\cos x, \sin x\cos x)=0$, где $P(y, z)$ — многочлен, решаются заменой

$$\cos x\pm\sin x=t\Rightarrow 1\pm 2\sin x\cos x=t^2.$$

Рассмотрим пример.

Пример 17. (РПИ, 1980 г.). $\sin x+\cos x=1+\sin x\cos x$.

Решение. Обозначим $\sin x+\cos x=t$. Тогда $(\sin x+\cos x)^2=t^2$, $\quad 1+2\sin x\cos x=t^2$. $\quad \sin x\cos x=(t^2-1)/2$. Наше исходное уравнение в новых обозначениях будет выглядеть так:

$$t=1+(t^2-1)/2 \quad \text{или} \quad t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0,\ t=1,$$

т. е.

$$\sin x+\cos x=1,\quad \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1,$$

$$\cos(\pi/4)\cos x+\sin(\pi/4)\sin x=1/\sqrt{2},$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, \qquad n\in\boldsymbol{Z},$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, \qquad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad 2\pi n \quad (n\in\boldsymbol{Z})$.

б) Уравнения вида $a\sin x+b\cos x+d$, где a, b, d — действительные числа и $a, b\neq 0$ решаются заменой

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)},\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)},\quad x\neq\pi+2\pi n \qquad (n\in\boldsymbol{Z}).$$

Пример 18. (МИНХ, 1979 г., СимфГУ, 1982 г.). $3\cos x+4\sin x=5$.

Решение.

$$3\,\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}+4\,\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=5,$$

$$3-3\operatorname{tg}^2(x/2)+8\operatorname{tg}(x/2)=5+5\operatorname{tg}^2(x/2),$$

$$4\,\mathrm{tg}^2(x/2)-4\,\mathrm{tg}(x/2)+1=0,\quad (2\,\mathrm{tg}(x/2)-1)^2=0,$$
$$\mathrm{tg}(x/2)=1/2,\qquad x=2\,\mathrm{arctg}(1/2)+2\pi n,\qquad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}(1/2)+2\pi n \quad (n\in \boldsymbol{Z})$.

в) Введением новой переменной решаются многие уравнения.

Пример 19. (МТИММП, 1977 г.). $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$.

Решение. $(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\sin 2x\cos 2x$,
$$2\sin^2 2x\cos^2 2x+\sin 2x\cos 2x-1=0.$$

Обозначим $\sin 2x\cos 2x=y$. Тогда последнее уравнение примет вид $2y^2+y-1=0$, или
$$2(y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Перейдем к переменной x и будем иметь

1) $\sin 2x\cos 2x=-1$, $2\sin 2x\cos 2x=-2$, $\sin 4x=-2$, $x\in\varnothing$.

2) $\sin 2x\cos 2x=1/2$, $\sin 4x=1$, $4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$,
$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n \quad (n\in \boldsymbol{Z})$.

Решение тригонометрических уравнений вида $f(x)=\sqrt{\varphi(x)}$

Пример 20. (МИНХ, 1978 г.). $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$, $x\in[\pi, 3\pi]$.

Решение. $\begin{cases} 1-\cos x\geqslant 0,\\ \sin x\geqslant 0.\end{cases}$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат:
$$1-\cos x=\sin^2 x,\quad 1-\cos x=1-\cos^2 x,$$
$$\cos^2 x-\cos x=0,\quad \cos x(\cos x-1)=0.$$

1) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$,

2) $\cos x=1$, $x=2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Но так как $\sin x\geqslant 0$ и $x\in[\pi, 3\pi]$, то оставляем $x=2\pi$, $5\pi/2$.

Ответ: 2π; $5\pi/2$.

Решение уравнений с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$

Пример 21. (МИФИ, 1978 г.).
$$(\cos(x/4)-2\sin x)\sin x+(1+\sin(x/4)-2\cos x)\cos x=0.$$

Решение. $\cos(x/4)\sin x - 2\sin^2 x + \cos x + \sin(x/4)\cos x - 2\cos^2 x = 0$,

$$\sin\left(x+\frac{x}{4}\right)+\cos x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)=0, \qquad \sin(5x/4)+\cos x=2.$$

Так как функции $\sin(5x/4)$ и $\cos x$ имеют наибольшее значение, равное 1, то сумма их равна 2, если $\sin(5x/4)=1$ и $\cos x=1$ одновременно, т. е.

$$\begin{cases}\sin(5x/4)=1,\\ \cos x=1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{5x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=2\pi k\end{cases} \quad (n,\ k\in \mathbf{Z});$$

$$2\pi k=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}n, \quad k=\frac{1+4n}{5}.$$

Так как $k\in \mathbf{Z}$, то $n=1+5m$ $(m\in \mathbf{Z})$, и тогда $x=2\pi+8\pi m$, $m\in \mathbf{Z}$.

Ответ: $2\pi+8\pi m$, $m\in \mathbf{Z}$.

Тригонометрические системы

Пример 22. $\begin{cases}\sin x\cos y=1/4,\\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y.\end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение и получим

$$3\sin x\cos y-\sin y\cos x=0.$$

Теперь подставим в полученное равенство значение произведения $\sin x\cos y$ из первого уравнения и будем иметь систему

$$\begin{cases}\cos x\sin y=3/4,\\ \sin x\cos y=1/4.\end{cases} \qquad (1)$$

Сложив уравнения системы (1), а затем сделав вычитание из второго уравнения первого, получим систему, равносильную системе (1):

$$\begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=-1/2,\end{cases} \qquad (2)$$

откуда

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi l\end{cases} \qquad (3)$$

и

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi l.\end{cases} \qquad (4)$$

Из системы (3) найдем

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi(k+l),$$
$$y=\frac{\pi}{3}+\pi(k-l).$$

Из системы (4) найдем

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi(k+l),$$
$$y=\frac{2\pi}{3}+\pi(k-l).$$

Обратите внимание на то, что целые числа, на которые в (3) умножаются 2π, нужно записать разными буквами (например, k и l), так как эти множества не связаны между собой. Если эти множества записать с одной и той же буквой, то это приведет к потере решений.

Решите уравнения (**1**—**245**).

1. $\sin x=1/2$.

2. $\sin x=-1/3$.

3. $\sin x=0$.

4. $\sin x=1$.

5. $\cos x=1/2$.

6. $\cos x=-1$.

7. $\cos x=0$.

8. $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

9. $\operatorname{ctg} x=-1$.

10. $\sin x=\sqrt{2}/2$.

11. $\sin x=-\sqrt{3}/2$.

12. $\sin x=-1/2$.

13. $\cos x=1$.

14. $\cos 2x=1$.

15. $\cos x=\sqrt{3}$.

16. $\operatorname{tg} x=-1$.

17. $\operatorname{tg}(x-1)=7$.

18. $\operatorname{tg}(2x+3)=\sqrt{3}$.

19. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. $\sin(3x-2)=-1$.

21. (МГУ, химфак, 1980 г.). $\sqrt{2}\cos^2 7x-\cos 7x=0$.

22. (МВМИ, 1977 г.). $2\sin x+\operatorname{tg} x=0$.

23. (МИНХ, 1977 г.). $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

24. (ВЗЭИС, 1978 г.). $4\cos^3 x-4\cos^2 x-\cos(\pi+x)-1=0$.

25. (МАТИ, 1979 г.). $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

26. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\operatorname{tg}^3 x-1+\frac{1}{\cos^2 x}-3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3$.

27. (МЭИ, 1979 г.). $\operatorname{tg} 2x\sin x+\sqrt{3}(\sin x-\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x)=3\sqrt{3}$.

28. (МВМИ, 1977 г.). $\sin^4 x=1-\cos^4 x$.

29. (МАДИ, 1979 г.). $\sqrt{3}\sin x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\sin x-\sqrt{3}=0$.

30. (МТИМБО, 1981 г.). $\cos 2x+3\sin x=2$.

31. (МАТИ, 1979 г.). $\cos x+\sec x=2$.

32. (СимфГУ, физфак, 1981 г.). $1+\cos x+\cos 2x=0$.

33. (МОПИ, 1976 г.). $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

34. (ВЛТИ, 1980 г.). $\cos x+2\cos 2x=1$.
35. (МТИПП, 1979 г.). $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$.
36. (МИХМ, 1977 г.). $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.
37. (МИХМ, 1976 г.). $5\operatorname{tg}^4 x-\sec^4 x=29$.
38. (МТИМБО, 1981 г.). $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.
39. (МТИМБО, 1982 г.). $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$.
40. (МТИЛП, 1980 г.). $\sin x+\cos x=0$.
41. (ВильнГУ, 1980 г.). $\cos^2 x-3\sin x\cos x=\sin(3\pi/2)$.
42. (МАМИ, 1979 г., МТИМБО, 1978 г.).
$$3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0.$$
43. (МАДИ, 1979 г.). $\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\sin x+1=0$.
44. (МИТХТ, 1979 г., МТИМБО, 1978 г.).
$$\sin^2 x(1+\operatorname{tg} x)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3.$$
45. (МТИМБО, 1981 г.). $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$.
46. (МТИМБО, 1982 г.). $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$.
47. (БашГУ, 1980 г.). $\sin x+\cos x=(1+\sqrt{3})/2$.
48. (МАТИ, 1979 г.). $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$.
49. (МИТХТ, 1979 г.). $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.
50. (МГРИ, 1979 г.). $\sin(\pi-6x)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)=\sqrt{3}$.
51. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1982 г.).
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin 2x=0.$$
52. (МТИМБО, 1981 г.). $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.
53. (УжГУ, 1980 г.). $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.
54. (МСИ, 1977 г.). $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.
55. (МАТИ, 1978 г.). $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$.
56. (МСИ, 1977 г.). $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$.
57. (МСИ, 1977 г.). $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.
58. (МИИГАиК, 1977 г.).
$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$$
59. (МИИГАиК, 1978 г.). $\cos 3x+\sin 5x=0$.
60. (МИИГАиК, 1978 г.). $\cos 3x+\sin(9x+2)=0$.
61. (МАТИ, 1976 г.). $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$.
62. (МИНХ, 1979 г.). $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.
63*. (МГИ, 1977 г.). $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}(\pi/4)+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg} x}=2$.
64. (МТИМБО, 1982 г.).
$$\cos 2x\cos x=\sin 7x\sin 6x+5\cos(\pi/2).$$
65. (МСИ, 1976 г.). $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$.
66. (МГУ, биофак, 1980 г.). $1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0$.

67. (МИСиС, 1978 г.). $2\cos x\sin 3x=\sin 4x+1$.
68. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$.
69. (МАТИ, 1976 г.). $\cos x\cos 3x=\cos 5x\cos 7x$.
70. (МИЭТ, 1978 г.). $\sin x\sin 3x=1/2$.
71. (МТИМБО, 1981 г.). $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$.
72*. (МФТИ, 1976 г.). $\cos 3x\,\mathrm{tg}\,5x=\sin 7x$.
73. (МЭИ, 1978 г.).

$$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1.$$

74. (МПИ, 1979 г.). $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.
75. (МТИМБО, 1981 г.). $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$.
76. (МИЭТ, 1978 г.). $\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.
77. (МИИГАиК, 1978 г.; МТИМБО, 1980 г.).

$$\sin^4(x/3)+\cos^4(x/3)=5/8.$$

78. (КишГУ, 1980 г.). $\sin^4(x/2)-\cos^4(x/2)=1/4$.
79. (МИЭТ, 1978 г.). $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$.
80. (МГРИ, 1979 г.). $\mathrm{tg}\,x+\sin(\pi+x)=2\sin^2(x/2)$.
81. (МИНХ, 1979 г.). $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x-\sin^2 4x=0$.
82. (РГУ, мехмат, 1980 г.). $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=(3/2)$.
83. (МТИПП, 1976 г.).

$$\sin x\sin 2x+\cos^2 x=\sin 4x\sin 5x+\cos^2 4x.$$

84. (МИФИ, 1978 г.). $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$.
85. (МГУ, геофизика, 1977 г.).

$$\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6x\right).$$

86. (МТИМБО, 1980 г.). $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3-\cos 6x}{4}$.
87. (МИЭТ, 1977 г.). $2\cos 4x-2\cos 2x=4\cos^2 x-1$.
88*. (МИИГАиК, 1978 г.). $2\cos^2 x-1=\sin 3x$.
89. (МВТУ, 1979 г.). $\mathrm{tg}\,(x/2)=1-\cos x$.
90. (МАТИ, 1979 г.).

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4\sin(\pi+x)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+8\cos^2\frac{x}{2}=4.$$

91. (МЭИ, 1978 г.). $3+5\sin 2x=\cos 4x$.
92. (МВТУ, 1978 г.). $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.
93. (МАДИ, 1977 г.). $\sin x-2\cos 2x=1$.
94. (МАТИ, 1979 г.). $\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)\right)\sin 4x=\cos^2(2x-\pi)$.
95. (МИИГАиК, 1976 г.). $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2(x/2)$.
96. (МТИММП, 1977 г.). $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$.
97*. (МТИМБО, 1982 г.). $\sin 3x+\sin^3 x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$.
98*. (МТИМБО, 1979 г.). $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\sin x\cos x$.
99. (МТИМБО, 1980 г.). $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$.
100. (МТИММП, 1977 г.; СимфГУ, 1982 г.; МТИМБО, 1982 г.).

$$\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\sqrt{2}/8.$$

101. (МИЭТ, 1977 г.). $\sin 2x=\cos 2x-\sin^2 x+1$.
102. (МИХМ, 1977 г.). $(\cos 2x-1)\operatorname{ctg}^2 x=-3\sin x$.
103. (МИХМ, 1977 г.). $8\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin 6x/\sin x$.
104. (МИНХ, 1977 г.).
$$\sin(x/2)\cos 2x+\sin^2 x\cos(x/2)=\cos^2 x\cos(x/2).$$
105*. (МФТИ, 1976 г.). $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.
106. (МЭИ, 1977 г.). $(\sin 7x+\cos 7x)^2=2\sin^2 11x+\sin 30x$.
107. (МГРИ, 1979 г.). $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$.
108*. (МТИМБО, 1979 г.).
$$\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x-\sin 2x=1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x.$$
109. (МГРИ, 1977 г.). $\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos 2x\sec^2 x$.
110. (МИФИ, 1976 г.). $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$.
111. (МТИМБО, 1981 г.). $(\cos 6x-1)\operatorname{ctg} 3x=\sin 3x$.
112. (МЭИ, 1977 г.). $\sin x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=1-0{,}5\sin 2x$.
113. (МИИГАиК, 1977 г.).
$$(1-\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$
114*. (МФТИ, 1976 г.). $2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}$.
115. (МТИПП, 1978 г.). $\sec x+\operatorname{cosec} x=2\sqrt{2}$.
116. (МИЭТ, 1977 г.; МТИМБО, 1979 г.).
$$\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$$
117. (МГИ, 1979 г.). $4\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 10x=\frac{3}{2}$.
118. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1981 г.).
$$3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x.$$
119. (МЭСИ, 1980 г.). $\sin x-\cos x=1$.
120. (МСИ, 1977 г.). $3\sin x=2(1-\cos x)$.
121*. (МФТИ, 1977 г.). $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x$.
122. (МАТИ, 1977 г.). $\sin 2x-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=3$.
123*. (МТИМБО, 1981 г.). $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$.
124. (МИФИ, 1978 г.). $\cos 9x-2\cos 6x=2$.
125. (МИФИ, 1978 г.).
$$\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-5-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-5-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\cos x}{2}=0.$$
126*. (МГУ, геофак, 1977 г.).
$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$$
127. (МТИМБО, 1979 г.). $\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.
128. (МГМИ, 1979 г.). $\frac{3}{2}-\sin 2x=\sqrt{9+10\sin 2x}$.

129. (МГУ, эконом. фак., 1979 г.). $\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3$.

130. (МГМИ, 1979 г.). $4\sin 3x+3=\sqrt{2\sin 3x+2}$.

131. (МГМИ, 1980 г.). $\sqrt{6-\sin x-7\cos^2 x}+\sin x=0$.

132*. (МТИМБО, 1978 г.). $\operatorname{tg} x+\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=2$.

133. (МЭИ, 1979 г.). $\sin^4 x+\sin^4\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)+\cos^4 x=\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

134. (МИФИ, 1978 г.). $\cos(\pi\sqrt{x-4})\cos(\pi\sqrt{x})=1$.

135. (МГПИ, 1979 г.). $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=0$.

136. (МТИМБО, 1981 г.). $\cos^2 x+5\cos x=2\sin^2 x$.

137. (МСИ, 1977 г.). $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x$.

138. (МИЭТ, 1979 г.). $\dfrac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0$.

139. (МИЭТ, 1978 г.). $4\cos^2 6x+16\cos^2 3x=13$.

140. (МИЭТ, 1977 г.). $\operatorname{tg} 5x+2\sin 10x=5\sin 5x$.

141. (МИХМ, 1977 г.). $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=\sec x\sec 3x\sin x$.

142. (МАТИ, 1977 г.; МТИМБО, 1980 г.).

$$\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x.$$

143. (МАДИ, 1980 г.). $2\sin^2 2x+6\sin^2 x=5$.

144. (МГУ, географ. фак., 1980 г.). $\cos^6 x-\sin^6 x=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x$.

145. (МИТХТ, 1979 г.). $4\sin^4 x+\sin^2 2x=1$.

146. (МСИ, 1977 г.). $1+\sin 2x=(\cos 3x+\sin 3x)^2$.

147. (МХТИ, 1977 г.). $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

148. (МВТУ, 1978 г.). $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=8\operatorname{ctg}^2 2x$.

149. (МВТУ, 1978 г.). $\cos x+\cos 4x+\cos 7x=0$.

150. (МВТУ, 1978 г.). $\sin 5x+\cos 3x-\sin x=0$.

151. (МВТУ, 1979 г.). $\cos^4(x/5)+\sin^2(x/5)=1$.

152. (МИИГАиК, 1978 г.). $\sin^2 x=\sin 3x+\cos x(\cos x-1)$.

153. (МИИГАиК, 1977 г.). $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x)$.

154. (МИИГАиК, 1980 г.). $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=(\sin x+\cos x)^2$.

155. (МИИГАиК, 1980 г.). $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

156. (МГИ, 1976 г.). $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$.

157. (МИТХТ, 1979 г.). $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0$.

158. (МГРИ, 1979 г.). $\operatorname{tg} 3x+\cos 6x=1$.

159. (МАТИ, 1977 г.; МТИМБО, 1981 г.). $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 3x=1$.

160. (МТИМБО, 1982 г.).

$$\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2 3x+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=3\cos\frac{\pi}{3}.$$

161. (МАТИ, 1979 г.).

$$\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right).$$

162. (МАТИ, 1980 г.). $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$.

163. (МСИ, 1977 г.). $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$.

164. (МИСиС, 1978 г.).

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=1+2\sin x.$$

165*. (МИСиС, 1978 г.).

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x.$$

166. (МИЭТ, 1978 г.; МТИМБО, 1980 г.). $\sin^6 x+\cos^6 x=7/16$.

167. (МИЭТ, 1977 г.). $\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2$.

168. (КолПИ, 1980 г.; МТИМБО, 1979 г.).

$$\cos 4x+2\cos^2 x=1.$$

169. (МАДИ, 1980 г.). $\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{3/2}$.

170. (ЛьвГУ, 1980 г.; МТИМБО, 1981 г.).

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\operatorname{ctg} x.$$

171. (ПГУ, 1980 г.). $\operatorname{ctg} x-2\sin 2x=1$.

172. (МИХМ, 1977 г.; МТИМБО, 1977 г.). $2\operatorname{tg} x-\cos 2x=2$.

173. (МИХМ, 1977 г.). $\operatorname{tg}(3x-1)\operatorname{ctg}(x+2)=1$.

174. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.).

$$|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}.$$

175. (МИУ, 1978 г.; МТИМБО, 1980 г.).

$$2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\operatorname{tg} x.$$

176. (МТИМБО, 1980 г.). $3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0$.

177. (ЛатвГУ, 1980 г.; МТИМБО, 1981 г.).

$$3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0.$$

178. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).

$$2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0.$$

179. (МЭИ, 1978 г.).

$$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1.$$

180. (МЭИ, 1977 г.).

$$\sin x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)+\operatorname{tg} x=\sqrt{3}.$$

181. (МИЭТ, 1979 г.). $\frac{5\sin x-5\operatorname{tg} x}{\sin x+\operatorname{tg} x}+4(1-\cos x)=0$.

182. (МИУ, 1978 г.). $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$.

183. (МТИММП, 1977 г.). $\cos x=\sin x-1$.

184. (МТИМБО, 1982 г.).

$$\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos^2 7x+\cos^2 9x+\cos\frac{3\pi}{2}.$$

185. (МГУ, геология, 1977 г.).

$$\sin^2(1{,}5x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2{,}5x\right)=\sin^2(5{,}5x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6{,}5x\right).$$

186. (МИЭТ, 1979 г.). $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x-\cos 4x=3$.

187*. (МИУ, 1978 г.). $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$.

188. (МГРИ, 1977 г.). $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$.

189. (МИРЭА, 1978 г.). $4\sin x+\cos x=4$.

190. (МИТХТ, 1979 г.). $\cos 5x \operatorname{tg} 6|x|+\sin 5x=0$.

191. (МИФИ, 1979 г.). $\operatorname{tg} 4x\cos 7x=\sin 7|x|$.

192. (МФТИ, 1977 г.). $2\cos 2x+2\cos x\sin^2 x=\cos x$.

193. (МФТИ, 1977 г.). $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\cos\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$.

194. (МФТИ, 1978 г.). $11\operatorname{ctg} x-5\operatorname{tg} x=16/\sin x$.

195. (МТИМБО, 1980 г.). $\cos^2 2x+\cos^2 4x-\sin^2 6x-\sin^2 8x=0$.

196*. (МФТИ, 1979 г.). $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$.

197. (МФТИ, 1979 г.). $\cos 3x-\sin 5x-\cos 7x=\sin 4x-\cos 2x$.

198. (МФТИ, 1980 г.). $5\sin x+\dfrac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos 2x-3\sin^2 x$.

199. (РПИ, 1980 г.). $\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

200. (МЭИ, 1978 г.). $\operatorname{tg}^2 2x=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

201. (ВильнГУ, 1980 г.). $2\sin 2x\sin 4x-\cos 2x=\sin 3x$.

202. (РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.; МТИМБО, 1979 г.). $3\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x+4\sin 2x=0$.

203. (СимфПИ, 1981 г.). $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$.

204*. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1977 г.).

$$\frac{\sin^3(x/2)-\cos^3(x/2)}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x.$$

205. (МТИМБО, 1982 г.). $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3$.

206. (МИИВТ, 1982 г.). $\sin x\cos x\sin 2x=1/8$.

207. (МИФИ, 1977 г., МТИМБО, 1982 г.). $\sin 6x+2=2\cos 4x$.

208*. (МИФИ, 1977 г.). $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x$.

209. (МИФИ, 1978 г.). $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0$.

210. (МИХМ, 1979 г.). $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=2(\sin 4x-\sin 2x)$.

211. (МИНХ, 1979 г.).

$$(\sin 13^\circ)^{\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} x}=\sin^2(2\pi-x)-\cos(\pi-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

212. (ВГУ, 1980 г.). $2\sin 3x\sin x+(3\sqrt{2}-1)\cos 2x=3$.

213. (ПГУ, 1980 г.). $\operatorname{ctg} x-2\sin 2x=1$.

214. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\operatorname{tg} x\sin x-\cos x=0{,}5\sec x$.

215. (МИУ, 1978 г.). $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=4\sqrt{3}/3$.

216. (МИУ, 1978 г.). $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0$.

217. (МИСИ, 1978 г.). $\sin(3x/2)\cos(x/2)=(\sin 2x)/2$.

218. (МТИМБО, 1978 г.). $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 4x$.

219. (МТИМБО, 1982 г.). $\sin x + \cos x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

220. (ЛГУ, матмех, 1980 г.). $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$.

221*. (ЛГУ, матмех, 1980 г.). $9\cos^{12} x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x = 6\cos^6 x \cos 2x + 6\cos^6 x$.

222. (ЛГУ, физфак, 1980 г.). $\sin 2x(0{,}1 - \cos x) = \sin 2x + 0{,}2\sin^3 x$.

223*. (ЛГУ, физфак, 1980 г.). $|\cos x| = \cos(x+a)$.

224*. (ЛГУ, геофак, 1980 г.).

$$\sin((2x+1)/x) + \sin((2x+1)/3x) - 3\cos^2((2x+1)/3x) = 0.$$

225*. (МИФИ, 1978 г.). $a\sin(x/2) - (\sin x + \sin(3x/2)) = 0$.

226. (НГУ, мехмат, 1980 г.). $\cos(2\sin x + (1+\sqrt{3})\cos x) = \sin((1-\sqrt{3})\cos x)$.

227*. (НГУ, мехмат, 1979 г.).

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin\frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

228*. (БГУ, мехмат, 1979 г.). $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

229. (МЭИС, 1981 г.). $\sqrt{\cos^2 2x + \left|\sin\left(2x - \frac{3}{2}\pi\right)\right| + \frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{20}{12}\pi\right)$.

230. (МЭИС, 1981 г.). $\left|\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1$.

231. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\frac{1}{\cos x} + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg}\frac{\pi + x}{2}$.

232. (КИЦМ, 1981 г.). $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$.

233. (ВильнГУ, матфак, 1979 г.). $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cos x$.

234. (МГМИ, 1980 г.). $\frac{3}{\sqrt{4\cos 2x + 1}} = \sqrt{2\cos 2x + 2}$.

235. (КГУ, ВМК, 1979 г.). $\sin(\pi x/2\sqrt{3}) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$.

236. (МТИМБО, 1977 г.). $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

237. (МТИМБО, 1982 г.). $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \sin x + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$.

238. (МИИВТ, 1982 г.). $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

239. (МТИМБО, 1978 г.). $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$.

240. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1978 г.).

$$\sin x - 4\cos x + \operatorname{tg} x = 4.$$

241. (МТИМБО, 1980 г.).

$$8\cos^6 x = 3\cos 4x + \cos 2x + 4.$$

242. (РГУ, мехмат. спец. прикладная матем., 1977 г.; МТИМБО, 1979 г.). $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

243. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1981 г.). $\sin 3x + 3\sin 4x + \sin 5x = 0$.

244. (МТИМБО, 1982 г.). $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$.

245. (МТИМБО, 1982 г.). $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

246. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите все значения p, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{p}\cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$.

247. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). Найдите все значения a, для которых уравнение $\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$ имеет решение.

248. (МИЭТ, 1977 г.). В интервале $(0, \pi/2)$ найдите корни уравнения $\sin\left(2x + \frac{\pi}{18}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = -1/4$.

249. (МЭСИ, 1977 г.). Найдите (в градусах) решение x уравнения $1 + \cos 10x \cos 6x = 2\cos^2 8x + \sin^2 8x$, удовлетворяющее условию $-20° < x < 80°$.

250. (МГУ, физфак, 1980 г.). $\sin x \cos(\pi/8) + \cos x \sin(\pi/8) = 1/2$, $x \in [-3\pi/2, \pi]$.

251. (МАТИ, 1979 г.). Решите уравнение $4\cos x(2 - 3\sin^2 x) + (\cos 2x + 1) = 0$. Найдите наименьшее расстояние между его положительными корнями.

252. (МИНХ, 1979 г.).

$$\cos(\pi + x) + \sqrt{3}\sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right),\ x \in \left]-\frac{4\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

253. (МТИМБО, 1979 г.). $2\sin^4 2x - \sin^2 2x \sin 4x = 2\sin^2 2x - \sin 4x$, $x \in [0;\ \pi]$.

254. (МФТИ, 1978 г.). Проверьте, какие из чисел $\pi n - \mathrm{arctg}\, 3$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, являются решениями уравнения

$$12\,\mathrm{tg}\, 2x + \frac{\sqrt{10}}{\cos x} + 1 = 0.$$

255. (МЭИ, 1980 г.). Найдите все корни уравнения $\cos 4x + \frac{10\,\mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = 3$, лежащие на отрезке $[-3\pi/4;\ \pi/2]$.

256. (МЭИ, 1980 г.). Найдите все корни уравнения $(1 - \cos 2x)\sin 2x = \sqrt{3}\sin^2 x$, лежащие на отрезке $[-\pi;\ \pi/3]$.

257. (МЭИ, 1979 г.). Найдите все корни уравнения $\sin x\,\mathrm{tg}\, 2x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, 2x) = 3\sqrt{3}$, удовлетворяющие неравенству $2 + \log_{1/2} x \leqslant 0$.

258. (МИЭМ, 1979 г.). Решите уравнение $\sin(\pi x^2) - \sin(\pi(x^2 + 2x)) = 0$ и найдите 7-й член возрастающей последовательности его положительных корней.

259. (МИНХ, 1978 г.). Решите уравнение $\cos 4x + 6 = 7\cos 2x$ и найдите сумму его корней на отрезке $[0;\ 314]$.

260. (МГУ, биофак, 1980 г.). Найдите все те решения уравнения $3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0$.

261. (МИНХ, 1979 г.; МТИМБО, 1981 г.). Решите уравнение $\mathrm{tg}\, 2x = 3\,\mathrm{tg}\, x$, если $x \in]-2\pi;\ 2\pi[$.

262. (МФТИ, 1979 г.). Найдите все решения уравнения $\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x+\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, удовлетворяющие неравенству $\frac{\cos 2x}{\cos 2-\sin 2}>2^{-\sin 4x}$.

Тригонометрические неравенства

Решите неравенства (**263—278**).

263. $\sin x>0$.

264. $\sin x>1/2$.

265. (МАМИ, 1979 г.). $\log_2(\sin(x/2))<-1$.

266. $\sin x\leqslant 1/2$.

267. $\sin x\leqslant -1$.

268. $\cos x<-\sqrt{2}/2$.

269. $\operatorname{tg} x>0$.

270. $\operatorname{tg} x<-\sqrt{3}$.

271. (ЯГУ, 1980 г.). $\sin x<\cos x$.

272. $\sin 3x<\sin x$.

273. $\sin x+\sqrt{3}\cos x>0$.

274. $\operatorname{tg}^2 x-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg} x+\sqrt{3}<0$.

275. $\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$.

276. (МИФИ, 1972 г.). $2\cos^2 x+5\cos x+2\geqslant 0$.

277. $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1$.

278. (ЛГУ, физфак, 1980 г.). $2^{1/\cos^2 x}\sqrt{y^2-y+\frac{1}{2}}\leqslant 1$.

Решите системы (**279—312**).

279. (КГУ, 1978 г.). $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x,\\ \cos x<-1/2.\end{cases}$

280. (ЛГУ, 1979 г.). $\begin{cases}\cos^3 x-\sin^3 x=\cos 2x,\\ 0\leqslant x\leqslant 3\pi/2.\end{cases}$

281. (МИНХ, 1979 г.). $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x,\\ -\pi/2\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

282. (МФТИ, 1979 г.). $\begin{cases}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1,\\ \frac{2\cos 7x}{\cos 3+\sin 3}>2^{\cos 2x}.\end{cases}$

283. (МИФИ, 1977 г.). $\begin{cases}\sin x\sin y=1/4,\\ \cos x\cos y=3/4.\end{cases}$

284. (МВТУ, 1976 г.). $\begin{cases}\sin x\sin y=1/4,\\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=3.\end{cases}$

285. (КГУ, 1978 г.). $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=1/2, \\ 0<x<\pi, \ 0<y<\pi. \end{cases}$

286. (МИФИ, 1976 г.). $\begin{cases} y-x=1/4, \\ \cos(\pi x)\cos(\pi y)=\sqrt{2}/2. \end{cases}$

287. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} \cos(x-y)=1/2, \\ \cos(x+y)=-1/2. \end{cases}$

288. (МИФИ, 1979 г.). $\begin{cases} x+y=3\pi/4, \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=2. \end{cases}$

289. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ x+y=\pi/3. \end{cases}$

290. (МИФИ, 1975 г.). $\begin{cases} x+y=2\pi/3, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2. \end{cases}$

291. (МИФИ, 1975 г.). $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2, \\ \cos x\cos y=1/2. \end{cases}$

292. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} x-y=13\pi/2, \\ 3\cos^2 x-12\cos y=-4. \end{cases}$

293. (УрГУ, 1976 г.). $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=11/16, \\ \sin((x+y)/2)\cos((x-y)/2)=5/8. \end{cases}$

294. (МГУ, 1977 г.). $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}(3\cos 2x-6\operatorname{ctg} y+2)=0, \\ 18\sin^2 x-2\operatorname{tg} y-3=0. \end{cases}$

295. (МГУ, 1979 г.). $\begin{cases} 4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y, \\ \cos 2x=0. \end{cases}$

296. (МФТИ, 1978 г.). $\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0. \end{cases}$

297*. (МФТИ, 1977 г.). $\begin{cases} 3\operatorname{tg}(y/2)+6\sin x=2\sin(y-x), \\ \operatorname{tg}(y/2)-2\sin x=6\sin(y+x). \end{cases}$

298. (МФТИ, 1978 г.). $\begin{cases} \sqrt{1+\sin x\sin y}=\cos x, \\ 2\sin x\operatorname{ctg} y+1=0. \end{cases}$

299*. (МФТИ, 1978 г.). $\begin{cases} \cos 2y+\frac{1}{2}=\left(\cos y-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x), \\ \sin y(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)=3\operatorname{ctg} y. \end{cases}$

300. (КуйбГУ, 1977 г.). $\begin{cases} \operatorname{tg} x\operatorname{tg} z=3, \\ \operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=6, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$

301. (КуйбГУ, 1977 г.). $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin(x+y), \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$

302. (МИФИ, 1977 г.). $\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x=3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y. \end{cases}$

303. (МИФИ, 1976 г.). $\begin{cases} \cos x+\cos y=a, \\ x+y=\pi/4. \end{cases}$

304. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\sin y=2a, \\ \operatorname{tg} x\sin y=a^2-1. \end{cases}$

305. (КГУ, 1980 г.). $\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}, \\ \cos x\cos y=1/4. \end{cases}$

306. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x+\sin 2y=\sin 2x, \\ 2\sin y\sin(x+y)=\cos x. \end{cases}$

307. (МИФИ, 1976 г.). $\begin{cases} \sin(x-y)=3\sin x\cos y-1, \\ \sin(x+y)=-2\cos x\sin y. \end{cases}$

308. (МИФИ, 1978 г.). $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sin\left(y-\frac{3}{4}\pi\right), \\ \operatorname{tg} y+\operatorname{ctg} y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

309. $\begin{cases} \operatorname{ctg}\sqrt[4]{x}=1, \\ \cos\sqrt[4]{x}=-1/\sqrt{2}. \end{cases}$

310. $\begin{cases} \cos y(\cos x-\cos y)=2\cos\frac{x+y}{2}\sin y\sin\frac{y-x}{2}, \\ 2y-x=\pi/2. \end{cases}$

311. $\begin{cases} \cos x+\cos 2x+\cos 3x=3, \\ \cos^3(x/2)=\cos^4 2x. \end{cases}$

312. (МГУ, ВМК, 1977 г.).

$$\begin{cases} \sin^2(-2x)-(3-\sqrt{2})\operatorname{tg} 5y=(3\sqrt{2}-1)/2, \\ \operatorname{tg}^2(5y)+(3-\sqrt{2})\sin(-2x)=(3\sqrt{2}-1)/2. \end{cases}$$

313. (ЛГУ, эконом. фак., 1980 г.). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x+3y)+\cos(2x+3y)=1, \\ \cos\left(x+\frac{\pi+18}{12}y\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi+18}{12}y\right)=2, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $|y|\leqslant 1$.

314. (МГУ, 1976 г.). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2(x-y)-(1+\sqrt{3})\operatorname{ctg}(x-y)+\sqrt{3}=0, \\ \cos y=\sqrt{3}/2, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0<x<\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

§ 12. ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называют *арифметической прогрессией*. Это число d называют *разностью* арифметической прогрессии.

Последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

Для арифметической прогрессии $\{a_n\}$ имеем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n,$$

где d—разность прогрессии, а S_n—*сумма* ее первых n членов.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно задать ее первый член и разность прогрессии.

Геометрическая прогрессия. Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называют *геометрической прогрессией*. Это число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии.

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ имеем:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},$$

где $q \neq 1$—знаменатель прогрессии, а S_n—*сумма* ее первых n членов. При $q = 1$

$$S_n = b_1 n.$$

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно задать ее первый член и знаменатель прогрессии.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $\{b_n\}$ при $|q| < 1$ определяется равенством

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \text{ при этом } S = \frac{b_1}{1-q}.$$

1. (ВГУ, матфак, 1981 г.). Найдите первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, в которой

$$\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10, \\ a_2 + a_9 = 17. \end{cases}$$

2. Сумма n первых членов последовательности $\{a_n\}$ определяется по формуле $S_n=2n^2+3n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

3. (ЛатвГУ, 1980 г.). Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=4n^2-3n$. Напишите первые три члена этой прогрессии.

4. (РПИ, 1980 г.). Найдите сумму 20 членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2, а седьмой равен 20.

5. (МАИ, 1976 г.). Определите первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма ее первых пяти членов, стоящих на четных местах, равна 15, а сумма первых трех членов равна (—3).

6. (КиевГПИ физмат, 1980 г.). Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

7. (МАМИ, 1979 г.). Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

8. (МИФИ, 1980 г.). Сумма квадратов пятого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 3, а произведение второго и четырнадцатого членов этой же прогрессии равно k. Найдите произведение первого и пятнадцатого членов прогрессии.

9. (МХТИ, 1977 г.). В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найдите прогрессию.

10. (МАИ, 1977 г.). Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

11. (МАМИ, 1978 г.). Между числами 1 и 1,3 вставьте пять членов так, чтобы они вместе с данными составили бы арифметическую прогрессию.

12. (ТартГУ, 1980 г.). Найдите 4 числа между числами 4 и 40 так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

13. (МИФИ, 1978 г.). Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2.

14. (МТИММП, 1977 г.). Решите уравнение $5^2\cdot5^4\cdot5^6\cdot\ldots\cdot5^{2x}=(0{,}04)^{-28}$.

15. (МВТУ, 1979 г.). Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

16. (КГУ, ЭКФ, 1977 г.). Сумма четырех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 1, а сумма квадратов этих чисел равна 0,3. Найдите эти числа.

17. (МВТУ, 1978 г.). В арифметической прогрессии 12 членов; сумма их равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами как 32:27. Найдите разность прогрессии.

18. (МИУ, 1977 г.). Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2 и в остатке 6. Найдите первый член и разность прогрессии.

19. (МИНХ, 1979 г.). Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $a_1a_3+a_2a_3$ имеет минимальное значение?

20. (МИНХ, 1979 г.). В арифметической прогрессии $a_7=9$. При каком значении разности арифметической прогрессии произведение $a_1a_2a_7$ будет наименьшим?

21. (МФТИ, 1975 г.). Две арифметические прогрессии содержат одинаковое число членов. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы первой прогрессии к сумме второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий.

22. (МВТУ, 1979 г.). Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найдите прогрессию, если ее второй член равен 12.

23. (ВГУ, матфак, 1980 г.). Каждая из двух троек чисел $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ и $\lg a-\lg 2b$, $\lg 2b-\lg 3c$, $\lg 3c-\lg a$ является арифметической прогрессией. Могут ли числа a, b, c служить длинами сторон треугольника? Если да, то какой это будет треугольник? Найдите углы этого треугольника, если он существует.

24. (МИСиС, 1979 г.). В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

25. (МИНХ, 1977 г.). В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 0,5. При каком значении разности прогрессии произведение первого, четвертого и пятого членов прогрессии будет наибольшим?

26. (МИФИ, 1977 г.). Некоторые числа встречаются в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, ... и 16, 21, ... Найдите сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

27. (МИСиС, 1976 г.). Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 3, а сумма их кубов равна 4. Найдите эти числа.

28. (МОПИ, 1979 г.). Докажите, что числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

29. (НГУ, мехмат, 1980 г.). При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}$, $a/2$, 25^x+25^{-x} составят арифметическую прогрессию?

30. (ВТИЛП, 1979 г.). Докажите, что последовательность, общий член которой $a_n=2\cdot 3^n$, является геометрической прогрессией и найдите сумму первых восьми членов.

31. (РПИ, 1980 г.). Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдите эту прогрессию.

32. (МАИ, 1979 г.). Разность между четвертым и первым членами геометрической прогрессии равна 52, а сумма первых трех членов прогрессии равна 26. Вычислите сумму первых шести членов этой прогрессии.

33. (МИНХ, 1979 г.). Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырех членов равна 480. Найдите сумму первых двенадцати членов.

34. (МАИ, 1979 г.). Сумма двух первых членов геометрической прогрессии равна 15. Первый член больше знаменателя этой прогрессии на 25/3. Найдите четвертый член этой прогрессии.

35. (ЛГУ, 1978 г.). Найдите три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их сумма равна 35, а сумма их квадратов равна 525.

36. (МАМИ, 1980 г.). Последовательность $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, причем $b_4/b_6 = 1/4$, $b_2 + b_5 = 216$. Найдите b_1.

37. (МАИ, 1979 г.). Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

38. (МГПИ, 1980 г.). Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 10,5, а разность первого и четвертого членов равна 31,5.

39. (МИСиС, 1978 г.). Числа a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию. Найдите $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$.

40. (МВТУ, 1979 г.). Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трех ее членов равна 26. Найдите прогрессию.

41. (МАИ, 1979 г.). Разность между первым и пятым членами геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, равна 15, а сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна 20. Вычислите сумму первых пяти членов прогрессии.

42. (МИНХ, 1979 г.). Найдите четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 112, а сумма средних членов равна 48.

43. (МИНХ, 1979 г.). Первый член геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ равен единице. При каком значении знаменателя прогрессии величина $4b_2+5b_3$ имеет минимальное значение?

44. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найдите эти числа.

45. (АзГПИ, матфак, 1980 г.). Числа $5x-y$, $2x+3y$ и $x+2y$ составляют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ составляют геометрическую прогрессию. Найдите x и y.

46. (НГУ, мехмат, 1979 г.). В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

47. (МАДИ, 1979 г.). Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 31, а сумма первого и третьего членов равна 26. Найдите седьмой член прогрессии.

48. (МИЭТ, 1977 г.). Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех членов прогрессии в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

49. (МАИ, 1979 г.). В геометрической прогрессии первый, третий и пятый члены соответственно равны первому, четвертому и шестнадцатому членам некоторой арифметической прогрессии. Вычислите четвертый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 5.

50. (РПИ, 1980 г.). Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму 1, а от третьего отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

51. (РПИ, 1980 г.). Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найти эти числа.

52. (МФТИ, 1976 г.). Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

53. (МАИ, 1979 г.). Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

54. (МФТИ, 1977 г.). Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

55. (КГУ, ВМК, 1979 г.). Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, если сумма крайних чисел 21, а сумма средних 18.

56. (МЭСИ, 1977 г.). Три целых числа, сумма которых равна 60, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2,2; 4; 7, то новые числа составят три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите наименьшее из первоначально заданных чисел.

57. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 6, а сумма первых трех ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 10,5. Найдите знаменатель и первый член прогрессии.

58. (МВТУ, 1978 г.). Разность третьего и второго членов геометрической прогрессии равна 12. Если к первому члену приба-

вить 10, ко второму 8, а третий оставить без изменения, то новые три числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии.

59. (МАИ, 1979 г.). Три числа, сумма которых равна 26, составляют геометрическую прогрессию. Если к этим числам прибавить соответственно 1; 6 и 3, то получатся три числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

60. (МХТИ, 1979 г.). Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

61. (МИФИ, 1976 г.). Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели геометрической прогрессии.

62. (МФТИ, 1976 г.). Три различных числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $x+y$, $y+z$, $z+x$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

63. (МФТИ, 1976 г.). Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

64. (МАДИ, 1976 г.). Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получим геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

65. (МИФИ, 1977 г.). Найдите трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, — арифметическую.

66. (МИФИ, 1976 г.). ЭВМ решала последовательно несколько задач. На решение каждой следующей задачи машина затрачивала в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач, если на решение всех задач, кроме первой, ушло 63,5 мин.; на решение всех задач, кроме последней, — 127 мин., а на решение всех задач, кроме первых двух, — 31,5 минут?

67. (МАТИ, 1977 г.). Даны первые два члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sqrt{3}$, $2/(\sqrt{3}+1)$. Найдите знаменатель и сумму этой прогрессии.

68. (МИФИ, 1978 г.). Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 325/128, а сумма второго и шестого членов, уменьшенная на 65/32, равна четвертому члену этой же прогрессии. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

69. (МИФИ, 1978 г.). Разность между первым и пятым членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,92, а сумма первого и третьего членов той же прогрессии равна 2,4. Найдите отношение квадрата суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме квадратов членов той же прогрессии.

70. (РПИ, 1980 г.). Найдите первые три члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен (—0,5).

71. (МИНХ, 1976 г.). Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 64/7. Найдите шестой член прогрессии.

72. (БашГУ, 1980 г.). Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

73. (МИСиС, 1976 г.). При каком иррациональном значении x три числа 0,(27); x; 0,(72) могут составить прогрессию (арифметическую или геометрическую). Найдите x и сумму четырех членов этой прогрессии.

74. (МФТИ, 1975 г.). Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 2 больше суммы первых трех членов этой прогрессии. Сумма первых шести членов равна 3. Найдите S.

75. (МИСиС, 1976 г.). Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов, стоящих на четных местах, в три раза меньше суммы всех ее членов, стоящих на нечетных местах, и сумма первых пяти членов этой прогрессии равна 484.

76. (МИНХ, 1979 г.). Вычислите сумму членов геометрической прогрессии $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots$, где a_1 есть наибольшее значение функции $y=(6x^2-x^3-16)/8$ на отрезке [1; 5], а знаменатель прогрессии $q=\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$.

77. (ВГУ, эконом. фак., 1981 г.). Первый член некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 1, а сумма ее равна S. Найдите сумму геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов исходной прогрессии.

78. (МАИ, 1976 г.). Сумма кубов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов ее членов как 12:13. Сумма двух первых членов прогрессии равна 4/3. Найдите эту прогрессию.

79. (МФТИ, 1977 г.). Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной 1/3.

80. (МИИЗ, 1977 г.). Найдите три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их произведение равно 64, а среднее арифметическое 14/3.

81. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1981 г.). Три числа a, b, 12 в указанной последовательности составляют геометрическую прогрессию, а числа a, b, 9 — арифметическую прогрессию. Найти a и b.

82. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1980 г.). Найдите значение x, при котором $\log_2(5\cdot 2^x+1)$, $\log_4(2^{1-x}+1)$, 1 составляют арифметическую прогрессию.

83. (МИСИ, 1978 г.). Представьте десятичную периодическую дробь 7,2(3) в виде обыкновенной дроби.

84. (МГИ, 1977 г.). Вычислите $(0{,}2)^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)}$.

85. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 3, а сумма первых ее трех членов с нечетными номерами равна $5^1/_4$.

86. (МВТУ, 1979 г.). Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 243, а сумма ее первых пяти членов равна 275. Найдите прогрессию.

87. (МХТИ, 1977 г.). Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1/8. Найдите прогрессию.

88. (МИЭТ, 1977 г.). Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов всех ее членов равна 108/13. Напишите прогрессию.

§ 13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. (УжГУ, 1980 г.). Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч больше, чем по расписанию. Определите скорость поезда по расписанию.

2. (КГУ, 1978 г.). Лыжнику необходимо было пробежать расстояние в 30 км. Начав бег на 3 мин позже назначенного срока, лыжник бежал со скоростью, большей предполагавшейся на 1 км/ч, и прибежал к месту назначения вовремя. Определите скорость, с которой бежал лыжник.

3. (МГРИ, 1979 г.). Велосипедист проехал 96 км на два часа быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем ранее предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

4. (МАИ, 1977 г.). Турист рассчитывал пройти a км за определенное время. Пройдя b км, турист отдохнул 15 мин и, чтобы прийти вóвремя, увеличил скорость на c км/ч. Определите первоначальную скорость движения туриста.

5. (МИНХ, 1979 г.). Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 км, навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Через 5 часов они встретились. После встречи скорость первого пешехода, идущего из A в B, уменьшилась на 1 км/ч, а скорость второго пешехода, идущего из B в A, возросла на 1 км/ч.

Известно, что первый пешеход прибыл в пункт B на 2 ч раньше, чем второй пешеход прибыл в пункт A. Определите первоначальную скорость первого пешехода.

6. (ПГУ, 1980 г.). Найдите скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

7. (КГУ, геофак, 1978 г.). Автомобиль проходит расстояние от пункта A до пункта B с постоянной скоростью. Если бы он увеличил скорость на 6 км/ч, то затратил бы на прохождение пути на 4 ч меньше. А со скоростью, меньшей начальной на 6 км/ч, он потратил бы на 6 ч больше. Найдите расстояние между пунктами A и B.

8. (КГУ, геофак, 1978 г.). Из пункта A в 12 ч вышел поезд. В 14 ч в том же направлении вышел другой поезд. Он нагнал первый поезд в 20 ч. Найдите средние скорости обоих поездов, если сумма средних скоростей равна 70 км/ч.

9. (МАИ, 1979 г.). Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя два часа после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход B. Найдите скорости пешехода и велосипедиста.

10. (МИНХ, 1980 г.). После встречи двух пароходов один из них прошел на юг, а другой — на запад. Через два часа после встречи расстояние между ними было 60 км. Найдите скорость каждого парохода, если известно, что скорость одного из них была на 6 км/ч больше скорости второго.

11. (МИНХ, 1979 г.). Первый рыбак должен проплыть на лодке до места встречи 35 км, а второй — на $31\,^3/_7\,\%$ меньше. Чтобы прибыть к месту встречи одновременно со вторым, первый выходит на полчаса раньше второго и делает в среднем на 2 км в час больше, чем второй. Найдите скорость, с какой плыл каждый рыбак и сколько времени каждый был в пути.

12. (БорПИ, 1980 г.). Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 28 км. Через час езды они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый прибыл в пункт B на 35 мин раньше, чем второй в пункт A. Какова скорость каждого велосипедиста?

13. (МЭСИ, 1977 г.). Из A в B через равные промежутки времени отправляются три машины. В пункт B они прибывают одновременно, затем выезжают в пункт C, расположенный на расстоянии 120 км от пункта B. Первая машина прибывает туда через час после второй, третья машина, прибыв в пункт C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Найдите скорость первой машины.

14. (МИНХ, 1977 г.). Из морского порта одновременно отходят два парохода по двум взаимно перпендикулярным направле-

ниям. Спустя 1/2 ч после отплытия пароходов кратчайшее расстояние между ними было 15 км, а спустя еще 15 мин оказалось, что один из пароходов был от пристани на 4,5 км дальше другого. Найдите скорость каждого парохода.

15. (БашГУ, 1980 г.). Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник становится прямоугольным. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени.

16. (БашГУ, 1980 г.). По двум прямолинейным дорогам, ведущим в пункт *A*, движутся с постоянными скоростями автомобиль и велосипедист. В начальный момент времени положения автомобиля, велосипедиста и пункта *A* образуют прямоугольный треугольник. После того как автомобиль проехал 25 км, указанный треугольник становится равносторонним. Найдите расстояние между автомобилем и велосипедистом в начальный момент времени, если в момент прибытия автомобиля в пункт *A* велосипедисту остается проехать 12 км.

17. (МЭСИ, 1979 г.). Из двух городов выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый автомобиль за 3 ч прошел 0,08 всего расстояния между городами, а второй — за 2,5 ч 7/120 этого расстояния. Найдите (в км/ч) скорость второго автомобиля, если до места встречи первый автомобиль прошел 800 км.

18. (МГРИ, 1979 г.). Из пункта *A* в пункт *B* выехал мотоциклист. Через 2 часа из *A* в *B* выехал автомобиль, который прибыл в *B* одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из *A* и *B* навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 20 мин после выезда. Сколько времени провел в пути из *A* в *B* мотоциклист?

19. (ВГУ, физфак, 1980 г.). Трасса велогонок представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определите протяженность трассы.

20. (КубГУ, 1980 г.). Две точки движутся по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Определите скорости точек.

21. (МИФИ, 1979 г.). Из пункта *A* в пункт *B* одновременно выехали по одному и тому же шоссе три автомобиля. Второй имел скорость на 30 км/ч больше первого и прибыл в *B* на 3 ч раньше него. Третий прибыл в *B* на 2 ч раньше первого, причем половину времени он двигался со скоростью первого, а другую половину времени — со скоростью второго. Найдите расстояние *AB*.

22. (МИФИ, 1978 г.). Три пловца должны проплыть из A в B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. Некоторую точку C, находящуюся между пунктами A и B, все пловцы миновали одновременно (до этого времени ни один из них в B не побывал). Третий пловец, доплыв до B и повернув назад, встречает второго в 9 м от B, а первого — в 15 м от B. Найдите скорость третьего пловца, если расстояние AB равно 55 м.

23. (МАИ, 1979 г.). Турист выезжает на велосипеде из пункта A. Проехав 1,5 ч со скоростью 16 км/ч, он делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Через 4 ч после выезда первого туриста вдогонку ему из пункта A выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

24. (МИХМ, 1977 г.). Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Первая автомашина едет со скоростью 40 км/ч, а скорость второй составляет 125 % скорости первой. Через 30 мин из того же пункта в том же направлении выехала третья автомашина, которая обогнала вторую на 1,5 ч позже, чем первую. Какова скорость третьей автомашины?

25. (МИСиС, 1980 г.). Из города A в город B вышел пассажирский поезд. В то же время из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого из поездов на всем участке движения постоянна. Через 2 ч после того как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 ч, а товарный — через 16 ч после встречи. Найдите, какое время в пути находился каждый поезд.

26. (ВЗИИЖТ, 1980 г.). Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько времени плыл по реке?

27. (НГУ, геофак, 1979 г.). Два автомобиля едут навстречу друг другу и встречаются через 6 дней. Если бы первый автомобиль ехал 1,8 дня, а второй — 1,6 дня, то вместе они бы проехали 520 км. Если бы первый проехал 2/3 пути, пройденного вторым, а второй — 1/3 пути, пройденного первым, то первому понадобилось бы для этого на 2 дня меньше, чем второму. Сколько километров за день проезжает каждый автомобиль?

28. (КубГУ, 1980 г.). Два туриста идут друг другу навстречу — один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из A на 6 ч позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 ч, а второй в A — через 9 ч. Найдите скорости туристов.

29. (МИИЖТ, 1979 г.). Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B. Первый остановился через 42 мин, не доехав 1 км, а второй — через 52 мин, не доехав 2 км до B. Если бы первый велосипедист проехал столько же километров, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первому потребовалось бы на 17 мин меньше, чем второму. Сколько километров между пунктами A и B?

30. (КубГУ, 1980 г.). Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Известно, что при движении в противоположных направлениях расстояние по окружности между сближающимися телами уменьшилось с 40 до 26 метров за 24 с. Какова скорость каждого тела?

31. (МИФИ, 1979 г.). Из пункта K в пункт M выехала машина. Одновременно с ней из пункта M навстречу машине выехал автобус. Когда машина проехала 0,4 пути от K до M, автобус находился от нее на расстоянии 4 км. Когда же автобус проехал половину пути, машина находилась от него на расстоянии 10 км. Найдите отношение времени, которое затрачивает машина на прохождение пути от K до M, и времени, которое требуется автобусу для прохождения того же пути. Скорости автобуса и машины постоянны.

32. (МВТУ, 1979 г.). Бак емкостью 2400 м^3 наполняется топливом. При опорожнении этого бака производительность насоса на 10 м^3/мин выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при наполнении бака.

33. (КГУ, ЭКФ, 1978 г.). Три каменщика могут совместно сложить стену за a ч. Первый из них, работая один, может сложить стену вдвое скорее третьего и на 1 ч скорее второго. За сколько времени каждый из них, работая отдельно, может сложить стену?

34. (РПИ, 1980 г.). Двое рабочих совместно могут выполнить заданную работу за 12 дней. Если первый рабочий сделает половину работы, а затем второй — вторую половину, то вся работа будет закончена за 25 дней. Сколько дней нужно каждому из рабочих в отдельности для выполнения работы?

35. (МХТИ, 1980 г.). Две трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 12 ч. Первая труба наполняет бассейн на 10 ч быстрее, чем вторая. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

36. (МХТИ, 1976 г.). Баржа была разгружена с помощью двух подъемных кранов в течение 15 ч, причем первый кран приступил к работе на 7 ч позднее второго. Известно, что первый кран, работая один, может разгрузить баржу на 5 ч скорее, чем второй. За сколько часов может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно?

37. (МИХМ, 1977 г.). Двое рабочих изготовляли партию одинаковых деталей. Когда первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину работы. После того как они проработали вместе еще 3 ч, им осталось выполнить 1/20 всей работы. За какое время каждый рабочий выполнит всю работу?

38. (МИНХ, 1978 г.). Два ученика потратили на подготовку к школьной викторине 7 ч, считая с момента, когда начал работу первый ученик; второй приступил к работе на полтора часа позже первого. Если бы эта работа была поручена каждому в отдельности, то первому ученику для ее выполнения потребовалось бы на 3 ч больше, чем второму. За какое время каждый из них отдельно мог сделать эту работу?

39. (МИНХ, 1979 г.). Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на один час больше второй. Однако вторая машинистка печатает в час на две страницы больше первой, а поэтому она напечатала на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

40. (МИЭМ, 1977 г.). Два рабочих должны совместно выполнить некоторую работу. Если бы производительность труда первого рабочего была в два раза больше, а производительность труда второго рабочего в полтора раза больше, то время, необходимое рабочим для выполнения задания, уменьшилось бы на 14/85 части времени, необходимого первому рабочему для выполнения всего задания. У какого из рабочих производительность труда выше и во сколько раз?

41. (МИНХ, 1979 г.). Двое рабочих заняты на одной и той же работе. Сначала 1-й рабочий проработал 1/3 того времени, которое требуется второму для выполнения всей работы, потом 2-й проработал 1/3 того времени, которое потратил бы 1-й на выполнение всей работы. После этого оказалось, что выполнено 13/18 всей работы. Вычислите, сколько времени потребовалось бы для выполнения работы каждому рабочему в отдельности, если вместе они могут выполнить ее за $3\,{}^3/_5$ ч.

42. (МИНХ, 1979 г.). Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья в три раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

43. (МИНХ, 1979 г.). Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 4 ч раньше, чем второй. Вначале они 2 ч работали вместе, после чего оставшуюся работу выполнил один первый рабочий за час. За какое время может выполнить всю работу второй рабочий?

44. (МГРИ, 1979 г.; МИНХ, 1980 г.). Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то работа заняла бы у них 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу один первый рабочий?

45. (МИФИ, 1977 г.). Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют

всю работу за 7,5 ч, первый, третий и пятый — за 5 ч, первый, третий и четвертый — за 6 ч, четвертый, второй и пятый — за 4 ч. За какой промежуток времени выполняют эту работу все пять человек, работая вместе?

46. (МАТИ, 1979 г.). В бассейн проведены две трубы, подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на 1/3 бассейне были открыты обе трубы и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

47. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1981 г.). Расстояние между двумя городами 220 км. Из этих городов навстречу друг другу выезжают два автомобиля. Они могут встретиться на середине пути, если первый выедет на 2 ч раньше второго. Если же они выедут одновременно, то они встретятся через 4 ч. Найдите скорости автомобилей.

48. (МГПИ, 1980 г.). Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 1 день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

49. (МСИ, 1980 г.). Две молотилки обмолачивают собранную пшеницу за 4 дня. Если бы одна из них обмолотила половину всей пшеницы, а затем вторая — оставшуюся часть, то вся работа была бы закончена за 9 дней. Во сколько дней каждая молотилка в отдельности могла бы обмолотить всю пшеницу?

50. (РПИ, 1980 г.). Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 10 км/ч, проехала по течению 91 км и вернулась обратно. Вычислите скорость течения реки, если лодка провела в пути 20 ч.

51. (КГУ, геофак, 1978 г.). Расстояние между пристанями A и B 300 км. Из A в B плывут два катера. Разность во времени отправления катеров равна 5 ч. К пристани B катера прибывают одновременно. Определите время движения каждого катера, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

52. (МГРИ, 1979 г.). Лодка спускается вниз по течению реки из пункта A в пункт B, находящийся в 10 км от A, а затем возвращается в A. Если собственная скорость лодки 3 км/ч, то путь из A в B занимает на 2 ч 30 мин меньше, чем из B в A. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка из A в B заняла 2 ч?

53. (МИФИ, 1978 г.). Катер обеспечивает регулярный перевоз пассажиров между пунктами A и B, расположенными вдоль реки. Если бы собственная скорость катера (в стоячей воде) возросла в 2 раза, то путь от A до B и обратно потребовал бы в 5 раз меньше того времени, которое катер обычно затрачивает на путь AB и обратно. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

54. (МСИ, 1979 г.). Расстояние по реке между пристанями равно 21 км. Отправляясь от одной из этих пристаней к другой, катер возвращается к первой обратно через 4 ч, затрачивая из этого времени 30 мин на стоянку. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 2,5 км/ч.

55. (КубГУ, 1980 г.). Моторная лодка спустилась по течению на 28 км и тотчас вернулась назад. На путь туда и обратно ей потребовалось 7 ч. Если бы скорость течения реки была в 2 раза больше действительной, то на путь туда и обратно потребовалось бы 11 ч 12 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

56. (МИНХ, 1979 г.). Для перевозки 60 т груза затребовали некоторое количество машин. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,5 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 машины. Сколько машин было запланировано первоначально?

57. (МАИ, 1979 г.). Бригада рыбаков планировала выловить за некоторое число дней 1800 ц рыбы. Треть установленного срока бригада ежедневно недовыполняла плановое задание на 20 ц из-за штормовой погоды. Однако в остальные дни бригада ежедневно вылавливала на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено на один день раньше установленного срока. Сколько центнеров рыбы бригада планировала вылавливать ежедневно?

58. (МАТИ, 1979 г.). Один совхоз получил средний урожай гречихи 21 ц с 1 га, а другой, у которого под гречихой было на 12 га меньше, добился урожая в 25 ц с 1 га. В результате во втором совхозе было собрано гречихи на 300 ц больше, чем в первом. Сколько центнеров гречихи было собрано в каждом совхозе?

59. (МАИ, 1979 г.). Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 $м^3$ древесины. Первые 3 дня бригада ежедневно выполняла установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 $м^3$ сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 $м^3$ древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была заготовлять бригада по плану?

60. (МИНХ, 1977 г.). На заводе для изготовления одного электродвигателя типа A расходуется 2 кг меди и 1 кг свинца, на изготовление одного электродвигателя типа B расходуется 3 кг меди и 2 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа было произведено на заводе, если известно, что израсходовали 130 кг меди и 80 кг свинца?

61. (РПИ, 1980 г.). В зале было 500 стульев, расположенных одинаковыми рядами. После реконструкции зала общее число мест уменьшилось на 1/10; число рядов было уменьшено на 5, но в каждом ряду можно было разместить на 5 стульев больше. Сколько рядов и сколько стульев в ряду было вначале?

62. (ПГУ, 1980 г.). Одна мастерская должна сшить 810 костюмов. Другая за этот же срок должна сшить 900 костюмов.

Первая закончила выполнение заказа за 3 дня до срока, а вторая — за 6 дней до срока. По скольку костюмов в день шила каждая мастерская, если вторая мастерская шила в день на 21 костюм больше первой?

63. (МХТИ, 1977 г.). В соревновании участвуют несколько команд, причем каждая из них должна провести по одной игре со всеми остальными. Сколько команд участвовало в соревновании, если всего было проведено 45 игр?

64. (МИХМ, 1977 г.). Магазин получил 64 чайника двух разных емкостей, причем меньший из них стоил на 1 руб. дешевле, чем больший. За большие чайники было выручено 100 руб., а за меньшие — 36 руб. Сколько было тех и других чайников и по какой цене они продавались?

65. (МАИ, 1979 г.). Было намечено разделить поровну премию между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Выяснилось, однако, что сотрудников, достойных премии, на 3 человека больше, чем предполагалось. В таком случае пришлось бы каждому получить на 4 рубля меньше. Администрация нашла возможость увеличить общую сумму премии на 90 рублей, в результате чего каждый премированный получил 25 рублей. Сколько человек получили премию?

66. (МИНХ, 1979 г.). Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа отнять 9, то получится число, записанное этими же цифрами в обратном порядке. Найдите это число.

67. (МИФИ, 1978 г.). Квадрат цифры десятков положительного двузначного числа, сложенный с произведением цифр этого числа, равен 52, а квадрат цифры единиц, сложенный с тем же произведением цифр, равен 117. Найдите это двузначное число.

68. (МИНХ, 1979 г.). Найдите два таких числа, чтобы их сумма, произведение и разность квадратов были равны.

69. (МИФИ, 1978 г.). Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 17, а сумма квадратов его цифр равна 109. Если из этого числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

70. (МИНГП, 1977 г.). Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из них, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найдите эти числа.

71. (МИФИ, 1977 г.). Найдите пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105.

72. (МАИ, 1976 г.). Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найдите данную дробь.

73. (МИХМ, 1976 г.). Какое двузначное число на 19 больше суммы квадратов его цифр и на 44 больше удвоенного произведения его цифр?

74. (МИФИ, 1977 г.). Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

75. (БГУ, 1978 г.). Найдите два натуральных числа, разность которых 66, а их наименьшее общее кратное равно 360.

76. (МИФИ, 1976 г.). Найдите пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

77. (МИФИ, 1977 г.). Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 85, а наименьшее общее кратное равно 102.

78. (МИФИ, 1977 г.). Найдите пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

79. (МИФИ, 1979 г.). В трехзначном числе сумма его цифр равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если сумма всех попарных произведений цифр этого числа равна 31.

80. (МИФИ, 1979 г.). Сумма квадратов цифр некоторого положительного трехзначного числа равна 74. В этом числе цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.

81. (МИНХ, 1979 г.). В двузначном положительном числе сумма квадратов цифр в 2,5 раза больше суммы его цифр и на единицу больше утроенного произведения этих цифр. Найдите это число.

82. (ВЗИИЖТ, 1980 г.). Найдите двузначное число, зная, что цифра единиц искомого числа на 2 больше числа его десятков, а произведение этого числа на сумму его цифр равно 144.

83. (МИНХ, 1979 г.). Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

84. (МИНХ, 1979 г.; ГомГУ, 1980 г.). Два куска латуни имеют массу 60 кг. Первый кусок содержит 10 кг чистой меди, а второй — 8 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

85. (МИФИ, 1980 г.). Сплав меди и олова массой 8 кг содержит p% меди. Какой кусок сплава меди с оловом, содержащий 40% олова, надо сплавить с первым, чтобы получить новый сплав с минимальным процентным содержанием меди, если масса второго куска 2 кг?

86. (УжГУ, 1980 г.). Имеются два объема воды, массы которых отличаются друг от друга на 2 кг. Этим массам придали одинаковое количество тепла, равняющееся 96 ккал, причем обнаружилось, что бóльшая масса воды нагрелась на 4° меньше, чем меньшая. Определите массу воды в каждом из двух объемов.

87. (ЛГУ, физфак, 1980 г.). Два парохода движутся в тумане навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. На расстоянии

4 км капитаны включают на 4 мин обратный ход с ускорением 0,1 м/с^2, после чего пароходы продолжают движение с достигнутыми скоростями. При каких значениях начальной скорости v_0 суда не столкнутся?

88. (МИНХ, 1979 г.). Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором меди в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

89. (МИНХ, 1979 г.). Вычислите вес и процентное содержание серебра в сплаве с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получат сплав, содержащий 90% серебра, а сплавив его с 2 кг сплава, содержащего 90% серебра, получат сплав 84% содержания серебра.

90. (МИНХ, 1979 г.). Два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, а второй 0,6 кг безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Вычислите вес первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты содержится в первом растворе на 10% больше.

91. (ПГУ 1980 г.). Из полного бака, содержащего 729 л кислоты, отлили a л и долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили a л раствора и снова долили бак водой. После того как такая процедура была повторена 6 раз, раствор в баке содержал 64 л кислоты. Найдите величину a.

92. (МИФИ, 1978 г.). В двух сплавах медь и цинк относятся как 5:2 и 3:4 (по весу). Сколько нужно взять кг первого сплава и сколько второго, чтобы после совместной переплавки получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

93. (МИФИ, 1978 г.). Имеются две бочки бензина разной цены, объемом 220 л и 180 л. Одновременно из обеих бочек отлили равное количество бензина и бензин, отлитый из первой бочки, перелили во вторую, а бензин, отлитый из второй бочки, — в первую, после чего цена бензина в обеих бочках стала одинаковой. Сколько бензина было перелито?

94. (МИФИ, 1978 г.). В двух сплавах медь и цинк относятся как 4:1 и 1:3. После совместной переплавки 10 кг первого сплава, 16 кг второго сплава и нескольких кг чистой меди получили сплав, в котором медь и цинк относятся как 3:2. Определите вес нового сплава.

95. (МГУ, эконом. фак., 1979 г.). Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. Наконец, опять после перемешивания, отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

96. (МГУ, геофак, 1980 г.). Имеются два сплава, состоящие

из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

97. (КубГУ, 1980 г.). Имеются два сплава с различным процентным содержанием свинца. Вес одного 6 кг, вес другого 12 кг. От каждого из них отрезали по куску равного веса, после чего сплавили их с остатком другого куска. В результате процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый отрезанный кусок?

98. (МГРИ, 1979 г.). После двух последовательных повышений зарплата достигла 15/8 частей по сравнению с первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого?

99. (БГУ, 1980 г.). Заработная плата рабочего за октябрь и ноябрь относилась как $1^1/_2 : 1^1/_3$, а за ноябрь и декабрь — как $2 : 2^2/_3$. За декабрь рабочий получил на 40 руб. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана ему начислили премию в размере 40% трехмесячного заработка. Найдите размер премии. (При решении считать, что число рабочих дней в каждом месяце одинаково).

100. (МИСИ, 1979 г.). При двух последовательных одинаковых процентных повышениях зарплата суммой в 100 рублей обратилась в 125 руб. 44 коп. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата.

101. (МИНХ, 1979 г.). Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%, за следующий год она увеличилась на 8%. Найдите средний ежегодный прирост продукции за этот период.

102. (МИНХ, 1979 г.). Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

103. (МЭСИ, 1977 г.). Тело двигалось в течение нескольких секунд и прошло за первую секунду 3 м, а за каждую следующую секунду на 4 м больше, чем за предыдущую секунду. Если бы тело прошло за первую секунду 1 м, а за каждую следующую на 8 м больше, чем за предыдущую, то длина пути, пройденного телом за тот же промежуток времени, была бы длиннее действительно пройденного им пути более, чем на 6 м, но менее, чем на 30 м. Определите время движения этого тела (в секундах).

104. (МЭСИ, 1977 г.). Требуется соорудить железнодорожную насыпь, имеющую в длину 100 м, а в поперечном сечении — равнобедренную трапецию с нижним основанием, равным 5 м, верхним основанием, не меньшим 2 м, и углом откоса, равным 45°. Какую высоту должна иметь эта насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее 400 м³, но не более 500 м³?

105. (КГУ, геофак, 1978 г.). Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

106. (ЛГУ, физфак, 1979 г.). Ширина реки a м, скорость ее течения — w м/с, скорость пловца в стоячей воде — v м/с ($v < w$), а скорость его движения на суше — u м/с. За какое наименьшее время пловец может попасть в точку, расположенную на противоположном берегу напротив того места, с которого он начинает переправу? Считайте, что в воде пловец не изменяет выбранного им в начале движения и что вектор скорости течения реки параллелен ее берегам, которые предполагаются прямолинейными.

107. (МИНХ, 1979 г.). Пункты A, B, C расположены так, что $|AB| = 285$ км, $\widehat{ABC} = 60°$. Из A в B выезжает автомобиль со скоростью 90 км/ч, одновременно из B в C отправляется поезд со скоростью 60 км/ч. Через какое время расстояние между автомобилем и поездом будет наименьшим?

108. (МИНХ, 1979 г.). Три пункта A, B и C расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 168 км. Из пункта A в пункт B выезжает машина со скоростью 60 км/ч, из пункта B в пункт C одновременно выезжает машина со скоростью 30 км/ч. Через сколько времени после выезда расстояние между этими машинами будет наименьшим?

109. (МИНХ, 1979 г.). На реке, скорость течения которой равна 5 км/ч, в направлении ее течения расположены пристани A, B и C, причем B находится посередине между A и C. От пристани B одновременно отходят плот, который по течению движется к пристани C, и катер, который идет к A, причем скорость катера в стоячей воде равна v км/ч. Дойдя до A, катер разворачивается и движется по направлению к C. Найдите все те значения v, при которых катер приходит в C позже, чем плот.

110. (МИНХ, 1979 г.). Расстояние между пунктами A и B равно 120 км. Из пункта A в пункт B по прямой дороге AB начинает двигаться мотоциклист со скоростью 30 км/ч. Одновременно из пункта B по дороге, перпендикулярной к дороге AB, начинает двигаться велосипедист со скоростью 10 км/ч. Когда расстояние между ними окажется наименьшим?

111. (МИНХ, 1979 г.). Пункт B находится на расстоянии 60 км от прямолинейной железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

112*. (МФТИ, 1979 г.). Пункт N расположен на берегу реки, ширина которой 1 км, а скорость течения 1 км/ч. Не менее чем на 3 км ниже по течению на другом берегу находится пункт M. Из пункта M выходит рыбак и идет вдоль своего берега по направлению к N со скоростью 4 км/ч. Одновременно из пункта N отплывает на лодке перевозчик, пересекает реку и, дождавшись рыбака, переправляет его в пункт N. Туда и обратно лодка двигалась по прямой, причем направление движения было выбрано так, что от отплытия до возвращения прошло наименьшее возможное время, равное 9/8 часа. Скорость лодки в стоячей воде 4 км/ч. Найдите расстояние (по течению) между пунктами M и N.

113. (МЭСИ, 1977 г.). Самоходная баржа должна доставить срочный груз от речной пристани A к пристани B, расположенной на 24 км выше A по течению, и возможно скорее вернуться в A за новым грузом. Скорость течения реки равна 6 км/час. Какова должна быть наименьшая собственная скорость баржи, чтобы рейс из A в B и обратно занял (не считая времени, затраченного на погрузку и разгрузку) не более трех часов?

114. (МЭИ, 1979 г.). Число 1,25 представьте в виде произведения трех положительных сомножителей так, чтобы произведение первого сомножителя на квадрат второго равнялось 5 и чтобы сумма всех трех сомножителей была наименьшей.

115. (МИИГАиК, 1980 г.). Найдите такое число x, чтобы сумма этого числа и его квадрата была наименьшей.

116. (МЭИ, 1978 г.). При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

117. (МИНХ, 1979 г.). Разложите число 20 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

118. (МИЭТ, 1977 г.). Турист идет из пункта A, находящегося на шоссейной дороге, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если скорость по шоссе 5 км/час, а по бездорожью 3 км/час.

119. (МИФИ, 1980 г.). Тело начинает двигаться в момент времени $t=0$ и через 4 с после начала движения приобретает ускорение 3 м/с^2. Найдите скорость тела через 6 с после начала движения и величину пути, пройденного телом за это время, если известно, что скорость тела изменяется по закону $v(t)=(t^2+$ $+b\cdot t+6)$ м/с и тело движется прямолинейно.

120*. (МФТИ, 1979 г.). Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости (в разные моменты времени),— равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 4/3. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты A и B прибыли одновременно. Найдите отношение ускорений поездов.

121. (НГУ, мехмат, 1979 г.). Расстояние между пунктами A и B равно 120 км. Мотоциклист, двигаясь без остановок, проедет это расстояние за 8 ч, если от A до промежуточного пункта C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч, а далее — с ускорением a км/ч². Одно и то же время на весь путь ему понадобится, если от A до C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч и от C до B — v_1 км/ч или от A до C со скоростью v_1 км/ч и от C до B — v_0 км/ч. Найдите v_0, если параметр a по величине равен $2v_0$ и $v_0 \neq v_1$.

§ 14. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в МГУ, МИФИ, МФТИ и некоторых других вузах страны. Комплексные числа будем обозначать буквой z. $z = x + iy$, x, y — числа действительные. Число $\bar{z} = x - iy$ — комплексно сопряженное с числом z.

Представьте в тригонометрической форме следующие комплексные числа (1—16).

1. -1. **2.** $-i$. **3.** $-\sqrt{3}+i$.

4. $-\sqrt{3}-i$. **5.** $-3-4i$.

6. $3-4i$. **7.** 5. **8.** $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\sin 32° + i\cos 32°$.

10. $\cos 12° - i\sin 12°$. **11.** $-\sin 110° + i\cos 110°$.

12. $\sin\alpha - i\cos\alpha$. **13.** $\sin\alpha + i\cos\alpha$. **14.** $-\sin\alpha - i\cos\alpha$.

15. $1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **16.** $1 + i\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Выполните указанные действия (17—23).

17. $(\cos 12° + i\sin 12°)^5$. **18.** $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)^4$.

19. $(-\sqrt{3}+i)^3$. **20.** $(-1+\sqrt{3i})^3$. **21.** $(1+i)^{20}$.

22. $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$. **23.** $(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

24. Докажите, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

25. Применив формулу Муавра, выразите $\cos 3\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$, а $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$.

Вычислите (26—30).

26. $\sqrt{i}$. **27.** $\sqrt[3]{-i}$. **28.** $\sqrt[3]{-1}$. **29.** $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

30. $\sqrt[n]{1}$.

Решите следующие уравнения (31—32).

31. $2(1+i)x^2 - 4(2-i)x - 5 - 3i = 0$.

32. $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$.

33. Докажите, что многочлен $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+2}$ делится без остатка на x^2+x+1, если m, n, k — любые целые неотрицательные числа.

Укажите точки комплексной плоскости z, удовлетворяющие уравнениям (34—39).

34. $\operatorname{Re} z^2=0$. **35.** $\operatorname{Im} z^2=0$. **36.** $|z|+z=0$.

37. $|z|^2+z=0$. **38.** $z^2+|\bar{z}|=0$. **39.** $z^2+|z|=0$.

40. Докажите, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

41. Докажите, что $z+\bar{z}$, $z\bar{z}$ — действительные числа.

42. Докажите, что

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$$

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_n; \quad \overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2;$$

$$\overline{z_1 z_2 \ldots z_n}=\bar{z}_1\bar{z}_2\ldots\bar{z}_n, \quad \overline{z^n}=\bar{z}^n; \quad \overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

43. Пусть $P_n(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$. Докажите, что

$$\overline{P_n(z)}=\bar{a}_n\bar{z}^n+\overline{a_{n-1}}\bar{z}^{n-1}+\ldots+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_0.$$

Если a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 — действительные числа, то докажите, что $\overline{P_n(z)}=P_n(\bar{z})$.

Найдите точки плоскости, удовлетворяющие уравнениям (44—47).

44. $|z+i|=|z+2|$. **45.** $|z-2|=|z+2i|$.

46. $\left|\dfrac{z-2}{z+3}\right|=1$. **47.** $\left|\dfrac{z+i}{z-3i}\right|=1$.

Найдите точки плоскости, удовлетворяющие следующим неравенствам (48—57).

48. $|z-1|>|z-i|$. **49.** $|z+2i|<|z-1|$.

50. $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1$. **51.** $|z+i|<1$. **52.** $|2z-i|<2$.

53. $1<|z+1-i|<2$. **54.** $1<|3iz-1|<3$.

55. $1/\sqrt{2}<|(1+i)z+i|<\sqrt{2}$. **56.** $|z-x|<|z-i|$.

57. $|z+i|<|z-x|<|z-1|$.

58. Найдите наименьшее значение, принимаемое функцией $w=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$, где z — комплексная переменная, $|z|\geqslant 2$.

Раздел II
НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

1. (МЭИ, 1979 г.). Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=x^3+3x-9$ на отрезке $[-2; 3]$; разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найдите знаменатель прогрессии.

Найдите пределы (**8—59**).

2. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

3. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

4. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1978 г.).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{7^{n-1}}\right).$$

5. (КГУ, мехмат, 1977 г.).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\ldots+\frac{n-1}{n^2+1}\right).$$

6. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

7. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$.

8. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-(25)^n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$. **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$. **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

12. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1978 г.).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}.$$

13. (РГУ, мехмат, спец. физика, 1977 г.).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4+3n+n^6}}{1+3n+2n^2}.$$

14. (МИИВТ, 1982 г.). $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4+5x^3+6x^2}{x^2-3x-10}$.

15. (МХТИ, 1979 г.). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(4+x)^3-64}{x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

18. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

19. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

20. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$.

21. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-2x-15}{2x^2-x-21}$.

22. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

23. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3-8}$.

24. (МИХМ, 1978 г.). $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-1}$.

25. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

26. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

27. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$.

28. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

29. (МФИ, 1979 г.). $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

30. (МГИ, 1977 г.). $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$.

31. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

32. (МИУ, 1978 г.). $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

33. (МИХМ, 1977 г.). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

34. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

35. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

36. (МИСиС, 1978 г.). $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

37. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$.

38. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

40. (МЭИ, 1979 г.).

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}+\frac{1}{3-\sqrt{x}}-6\cdot\frac{x^2+162}{729-x^3}\right).$$

41. (МЭИ, 1979 г.).

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{4}{x^2-x^{-1}}-\frac{1-3x+x^2}{1-x^3}\right)^{-1}+3\,\frac{x^4-1}{x^3-x^{-1}}\right].$$

42. (МЭИ, 1979 г.).

$$\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{x^3-4x}{x^3-8}\right)^{-1}-\left(\frac{x+\sqrt{2x}}{x-2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)^{-1}\right].$$

43. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}3x$.

44. (МТИММП, 1977 г.). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos x}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

48. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

49. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$.

52. (МФИ, 1979 г.). $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+3x-4}{1-5x^2}$.

53. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{5x-1}\cdot\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x-1}\right)$.

54. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+7x-2}{6x^3-4x+3}$.

55. (МИХМ, 1979 г.). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

56. (МИХМ, 1979 г.). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}$.

57. (МИУ, 1978 г.). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

58. (МИИВТ, 1982 г.). $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{5+x}-1}{x^2+4x}$.

59. (МИИВТ, 1982 г.). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x t\,dt}{x\operatorname{tg}(x+\pi)}$.

60. Используя определение, покажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=0,\end{cases}$$

непрерывна в точке $x=0$.

61. Используя определение, покажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{если}\ x\neq 0,\\ 1, & \text{если}\ x=0,\end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$.

§ 2. Производная. Исследование функций с помощью производной

1. (МХТИ, 1977 г.). Дана функция $f(x)=\sin^2 2x$. Найдите

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{\cos 2x}.$$

2. (МХТИ, 1977 г.). Вычислите $f'(x)+f(x)+2$, если $f(x)=x\sin 2x$.

3. (МЭИ, 1978 г.). Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right)\times$$
$$\times\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

4. (МЭИ, 1979 г.). Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{16x}+12\sqrt[4]{x}+9}-\frac{\sqrt[4]{x}-3}{2\sqrt[4]{x}+3}\right)(2\cdot 3^{\log_{81}x}+3).$$

Докажите тождества (5—8).

5. (МТИ, 1978 г.). $f'(1)+f'(-1)=-4f(0)$, если $f(x)=$ $=x^5+x^3-2x-3$.

6. (МТИ, 1978 г.). $f'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$, если $f(x)=3e^{x^2}$.

7. (МТИ, 1978 г.). $f'(x)+f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=0$, если $f(x)=\ln x$.

8. (МАИ, 1979 г.). $2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, где $f(x)=\cos x$.

9. (МАМИ, 1979 г.). Найдите множество значений x, удовлетворяющих условию $[\varphi(x)]'+\varphi(x)=0$, если $\varphi(x)=\cos x$.

Даны две функции $f(x)$ и $g(x)$. При каких x имеет место равенство $f'(x)=g(x)$? (**10—13**).

10. (МИСиС, 1979 г.). $f(x)=\sin^4 3x$ и $g(x)=\sin 6x$.

11. (МИСиС, 1979 г.). $f(x)=\sin^3 2x$ и $g(x)=4\cos 2x-5\sin 4x$.

12. (МИСиС, 1979 г.). $f(x)=2x^2\cos^2(x/2)$ и $g(x)=x-x^2\sin x$.

13. (МИСиС, 1979 г.). $f(x)=4x\cos^2(x/2)$ и $g(x)=8\cos(x/2)-$ $-3-2x\sin x$.

При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна нулю? (**14—16**).

14. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $f(x)=1-\sin(\pi+x)+$ $+2\cos((3\pi+x)/2)$.

15. (КГУ, мехмат., 1977 г.). $f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+$ $+3(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$.

16. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $f(x)=20\cos 3x+12\cos 5x-$ $-15\cos 4x$.

Решите неравенства (**17—21**).

17. (МВМИ, 1977 г.). $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=x^3+x-\sqrt{2}$, $g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$.

18. (МВМИ, 1977 г.). $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{3}$, $g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}$.

19. (МИИГАиК, 1977 г.). $f(x)\leqslant g'(x)$, если $f(x)=2/x$, $g(x)=x-x^3$.

20. (МИЭТ, 1978 г.). $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=x+\ln(x-5)$, $g(x)=\ln(x-1)$.

21. (МИЭТ, 1978 г.). $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=5^{2x+1}/2$, $g(x)=5^x+4x\ln 5$.

22. (МАМИ, 1978 г.). Найдите все $f(x)$, удовлетворяющие уравнению $f^2(x)+4f'(x)f(x)+[f'(x)]^2=0$.

Найдите производные следующих функций (23—37).

23. $y=(x+1)(x+2)^2$.

24. $y=\sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$.

25. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

26. $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

27. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

28. $y=\lg^3(x^2)$.

29. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

30. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

31. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

32. $y=\ln\operatorname{tg}(x/2)$.

33. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

34. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin y}{1+\sin x}}$.

35. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

36. $y=\sin(\sin(\sin x))$.

37. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

38. (Симф. ГУ, матфак, 1982 г.). Докажите, что $e^x-x>1$, если $x>0$.

Найдите интервалы возрастания и убывания функций (39—43).

39. (МИИВТ, 1982 г.) $y=-x(x-2)^2$.

40. (МАИ, 1977 г.). $y=2x^3+3x^2-2$.

41. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$.

42. (МИНХ, 1978 г.). $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$.

43. (МИНХ, 1977 г.). $f(x)=(2^x-1)(2^x-2)^2$.

Определите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функций (44—52).

44. (МИСиС, 1978 г.). $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

45. (МСИ, 1977 г.). $y=x^4+4x^3-8x^2+3$.

46. (КГУ, геофак, 1977 г.; МСИ, 1977 г.). $y=x^4-4x^3-8x^2+3$.

47. (КГУ, геофак, 1977 г.). $y=4x^4-2x^2+3$.

48. (МИИГАиК, 1978 г.). $f(x)=x^3/(x^2+3)$.

49. (МИИГАиК, 1978 г.). $f(x)=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

50. (МГУ, почв. отд. биофака, 1977 г.). $f(x)=(x-1)e^{3x}$.

51. (МТИМБО, 1980 г.). $f(x)=x\cdot e^{-3x}$.

52. (МТИМБО, 1978 г.; ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=x-\ln x$.

Найдите критические точки функций и исследуйте их на максимум и минимум (53—63).

53. $y=2x^2+x+2$.

54. (МИИГАиК, 1978 г.) $f(x)=3x^4-4x^3$.

55. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=x^4-10x^2+9$.

56. (МИЭТ, 1978 г.). $y=(x-3)^2(x-2)^2$.

57. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$.

58. (МАТИ, 1977 г.). $y=x^5-x^2+8$.

59. (МИИГАиК, 1978 г.). $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$.

60. (МТИМБО, 1982 г.). $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$.

61. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1982 г.). $f(x)=\frac{x^2}{17}-\ln(x^2-8)$.

62. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=x\cdot e^x$.

63. $y=xe^{-x^2}$.

64. (КГУ, геофак, 1978 г.). Найдите все значения x, при которых функция $y=\sin x-\cos^2 x-1$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

65. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a и b все экстремумы функции $f(x)=\frac{5a^2}{3}x^3+2ax^2-9x+b$ положительны и максимум находится в точке $x_0=-5/9$?

66. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a и b все экстремумы функции $f(x)=a^2x^3-0{,}5ax^2-2x-b$ положительны и минимум находится в точке $x_0=1/3$?

67. (МАИ, 1979 г.). При каких действительных значениях a и b все экстремумы функции $f(x)=a^2x^3+ax^2-x+b$ отрицательны и максимум находится в точке $x_0=-1$?

68. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1982 г.). Найдите постоянную p, при которой функция $f(x)=px^2+\frac{2p^2-81}{2}x-12$ имеет максимум в точке $x=9/4$.

69*. (ЛГУ, матмех, 1977 г.). В зависимости от p укажите те значения a, для которых уравнение $x^3+2px^2+p=a$ имеет три различных действительных корня.

70. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Найдите наибольшее значение функции $y=10+4x\ln 9-3^{x-1}-3^{3-x}$.

71. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Найдите наибольшее значение функции $y=7+2x\ln 25-5^{x-1}-5^{2-x}$.

72. (КГУ, РФФ, 1977 г.). Найдите наименьшее значение функции $y=3^x+2\cdot 3^{3-x}-x\ln 27-9$.

73. (МИТХТ, 1979 г.). При каком значении x выражение

$$2^{x^2}-1+\frac{2}{2^{x^2}+2}$$

принимает наименьшее значение?

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций (**74—93**).

74. (МИИГАиК, 1977 г.; ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=\frac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке [0; 2].

75. (МХТИ, 1979 г.). $f(x)=-x^3+3x^2+5$ на отрезке $[0; 3]$.

76. (МВТУ, 1979 г.). $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ на отрезке $[0; 3]$.

77. (МИИВТ, 1982 г.). $f(x)=3x^3-9x^2+2$ на отрезке $[-1; 4]$.

78. (МИНХ, 1979 г.). $f(x)=2x^3+3x^2-12x+30$ на отрезке $[-3; 3]$.

79. (МАИ, 1977 г.). $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-1; 5]$.

80. (КГУ, химфак, 1978 г.). $y=x^3-4x^2+4x+3$ на отрезке $[-1; 3]$.

81. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=x^3-3x^2+3x+2$ на отрезке $[-2; 2]$.

82. (МИСиС, 1978 г.). $y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на отрезке $[-3; 6]$.

83. (МХТИ, 1978 г.). $y=|x^3-3x^2+5|$ на отрезке $[0; 3]$.

84. (МСИ, 1977 г.). $f(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[0; 3]$.

85. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[-1; 1]$.

86. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=x^5-x^3+x+2$ на отрезке $[-1; 1]$.

87. (МИРЭА, 1979 г.). $f(x)=\sqrt[3]{x^2/(2x-1)}$ на отрезке $[3/4; 2]$.

88. (МИТХТ, 1979 г.). $f(x)=(2^x+2^{-x})/\ln 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

89. (МИТХТ, 1979 г.). $f(x)=2\cdot 3^{3x}-4\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x$ на отрезке $[-1; 1]$.

90. (МИНХ, 1977 г.). $f(x)=2\cdot 2^{3x}-9\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x$ на отрезке $[-1; 1]$.

91. (КГУ, химфак, 1978 г.). $f(x)=\sin x+\cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

92. (КГУ, ЭКФ, 1977 г.). $f(x)=\cos 3x-15\cos x+8$ на отрезке $[\pi/3; 3\pi/2]$.

93. (КГУ, ЭКФ, 1977 г.). $f(x)=(5+\sin x)\cos x+3x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

94*. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\frac{1}{2bx^2-x^4-3b^2}$ на отрезке $[-2; 1]$ в зависимости от параметра b.

95*. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^4-6bx^2+b^2$ на отрезке $[-2; 1]$ в зависимости от параметра b.

96. (КГУ, геофак, 1978 г.). Найдите экстремумы функции $f(x)=2x\sin 2x+\cos 2x-\sqrt{3}$ на отрезке $[-\pi/2; 3\pi/8]$.

97. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Докажите, что для функции $f(x)=(\cos x)^2(\sin x)$ выполняется неравенство

$$\min_{[-\pi;\ \pi]} f(x) > -7/18.$$

98. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Докажите, что для функции $f(x)=(\sin x)\cdot(\sin 2x)$ выполняется неравенство $\max\limits_{[-\pi;\ \pi]} f(x) < 0{,}77$.

Составьте уравнение касательной к графику функций **(99—108)**.

99. (МТИМБО, 1978 г.). $y=x^2-2x$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

100. $y=-x^2-1$ в точке $x=2$.

101. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). $y=2x^2+1$ в точке (1; 5).

102. (МИНХ, 1979 г.). $y=4x-x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

103. (МХТИ, 1979 г.). $y=x^2-2x+5$ в точке ее пересечения с осью Oy.

104. (МИУ, 1978 г.). $y=\frac{1}{2}(e^{x/2}+e^{-x/2})$ в точке с абсциссой $x=2\ln 2$.

105. (МИНХ, 1977 г.). $y=2^{-x}-2^{-2x}$ в точке с абсциссой $x=2$.

106. (МИНХ, 1977 г.). $y=3^x+3^{-2x}$ в точке с абсциссой $x=1$.

107. (МИНХ, 1979 г.). $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$ в точке ее максимума.

108. (МИНХ, 1979 г.). $y=-x^2-2$, параллельную прямой $y=4x+1$.

109. (МХТИ, 1977 г.). Касательная к кривой $y=4-x^2$ образует с осью Ox угол 75°. Найдите координаты точки касания.

110. (МХТИ, 1977 г.). Найдите значение коэффициента k, при котором кривая $y=x^2+kx+4$ касается оси Ox.

111. (МСИ, 1977 г.). На кривой $y=x^2-x+1$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y=3x-1$.

112. (МСИ, 1977 г.). На кривой $y=4x^2-6x+3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

113. (МИУ, 1978 г.). На параболе $y=x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей? Напишите уравнение секущей и этой касательной.

114*. (МИУ, 1978 г.). Найдите точки, в которых касательные к кривым $y=f(x)=x^3-x-1$ и $y=\varphi(x)=3x^2-4x+1$ параллельны. Напишите уравнение касательных.

115. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите угол между касательными к графику функции $f(x)=x^3-4x^2+3x+1$, проведенными в точках с абсциссами 0 и 1.

116. (МИСиС, 1979 г.). Найдите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; —2) к параболе $y=x^2$.

117. (МИСиС, 1979 г.). Найдите угол между касательными, проведенными из точки (0; 2) к параболе $y=-3x^2$.

118. (МИСиС, 1979 г.). Найдите уравнения общих касательных к параболам $y=x^2$ и $y=-x^2+3x-2$.

119. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). Найдите уравнение касательной к параболе $y=x^2-7x+3$, если эта касательная параллельна прямой $5x+y-3=0$.

120. (МТИМБО; 1980 г.). В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол в 135°?

121. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Найдите точки, в которых касательная к кривой $y=x-0{,}5\sin 2x-0{,}5\cos 2x+16\cos x$ параллельна оси абсцисс.

122. (МТИМБО, 1978 г.). Найти угол между касательными к графику функции $y=x^3-x$ в точках с абсциссами $x_1=-1$ и $x_2=1$.

123. (МТИМБО, 1978 г.). В точке M (1; 8) к кривой $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

124. (МИИВТ, 1982 г.). Найдите наибольший объем V конуса с образующей a.

125. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении α вместимость воронки будет наибольшей?

126. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). В равнобочной трапеции нижнее основание равно l, угол при основании равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. При каком значении α площадь трапеции будет наибольшей? Найти наибольшую площадь.

127. (РГУ, мехмат, спец. матем., механ., 1977 г.). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Радиус шара, вписанного в пирамиду, равен R. Найти объем пирамиды. При каком значении α объем пирамиды будет наименьшим?

128. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). Конус описан около шара радиуса R. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 2α. Найти площадь осевого сечения конуса. При каком значении α площадь будет наименьшей?

129. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г). Правильная четырехугольная пирамида объема V описана около полушара так, что центр основания пирамиды лежит в центре шара. Угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания равен α. Найти объем полушара. При каком значении α объем будет наибольшим?

130. (МИСиС, 1979 г.). Найдите уравнения общих касательных к параболам $y=x^2-5x+6$ и $y=x^2+x+1$.

131. (МАТИ, 1979 г.). Докажите, что кривая $y=x^4+3x^2+2x$ не пересекается с прямой $y=2x-1$, и найдите расстояние между их ближайшими точками.

132. (МАМИ, 1979 г.). Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелипипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объем был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось 5/2.

133. (МИНХ, 1979 г.). Площадь, занимаемая печатным текстом, составляет на странице книги 432 см². Ширина полей вверху и внизу страницы составляет по 2 см, а ширина боковых полей по 1,5 см. Каковы должны быть ширина и высота страницы, чтобы количество израсходованной бумаги было наименьшим?

134. (МВТУ, 1978 г.). Представьте число 48 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

135. (МИНХ, 1978 г.). Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^2 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

136. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Под каким углом α нужно провести прямую через точку $(x_0; y_0)$, чтобы длина отрезка между осями координат была наименьшей?

137. (РГУ, мехмат, спец. матем., механ., 1977 г.). В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, площадь которого равна S, а острый угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β. При каком значении α объем будет наименьшим?

138. (МИСиС, 1979 г.). В правильной шестиугольной пирамиде длина бокового ребра равна 1 см. При какой длине стороны основания объем пирамиды будет наибольшим?

139. (МИЭТ, 1977 г.). Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

140. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при заданной площади S полной поверхности.

141. (МГМИ, 1980 г.). Объем прямой треугольной призмы равен V. В основании призмы лежит равносторонний треугольник. Какова должна быть длина стороны основания, чтобы площадь полной поверхности призмы была наименьшей?

142. (ЯГУ, 1980 г.). Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. При каком α объем пирамиды будет наибольшим?

143. (МВТУ, 1979 г.). Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V, найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

144. (МГМИ, 1980 г.). Из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

145. (МВТУ, 1978 г.). Основаниями правильной призмы служат квадраты. Одно из оснований призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого лежат на поверхности этого шара. Определите, какой должна быть длина высоты призмы, чтобы сумма длин всех ее ребер была наибольшей?

146. (МИНХ, 1979 г.). Консервная банка должна иметь форму цилиндра, емкостью 1 дм^3. Рассчитайте, каким должен быть радиус ее оснований, чтобы площадь жестяного листа, израсходованного на изготовление банки, была минимальной?

147. (МИЭТ, 1979 г.). Найдите высоту цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, который может быть вписан в шар радиуса R.

148. (ЯГУ, 1980 г.). Площадь боковой поверхности конуса равна S. При каком радиусе основания шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объем?

149. (МИЭТ, 1979 г.). Дан шар радиуса r. Впишите в него конус с наибольшей площадью боковой поверхности. Определите эту площадь.

150. (МВТУ, 1978 г.). В правильной треугольной призме расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно l. При какой длине высоты призмы ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

151. (МЭСИ, 1979 г.). Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса $R=\sqrt{3}$ так, чтобы центр основания конуса совпадал с центром шара.

152. (КГУ, мехмат, 1977 г.). В шар радиуса R вписан прямой круговой цилиндр высоты H. Найдите объем этого цилиндра. При каком H объем будет наибольшим? Найдите этот наибольший объем.

153. (КГУ, ВМК, 1978 г.). В данный шар вписан цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Найдите отношение радиуса шара к радиусу основания этого цилиндра.

154. (МИЭТ, 1980 г.). В шар вписан цилиндр наибольшего объема. Во сколько раз объем шара больше объема этого цилиндра?

155. (МИУ, 1978 г.). В шар радиуса R вписан цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Найдите объем этого цилиндра.

156. (КГУ, ВМК, 1978 г.). В данный шар вписан конус наибольшего объема. Найдите отношение радиуса шара к высоте этого конуса.

157. (МЭСИ, 1979 г.). Около цилиндра, радиус основания которого равен a, описан конус наименьшего объема. Плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают. Найдите радиус основания этого конуса.

158. (ЛьвГУ, 1980 г.). В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной 2φ, вписана сфера единичного радиуса. Найдите площадь боковой поверхности конуса. При каких значениях φ эта площадь будет наименьшей?

159. (МВТУ, 1979 г.). В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида так, что все ее вершины принадлежат сфере. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

160. (МВТУ, 1979 г.). В конус с высотой H и радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма так, что одно ее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат боковой поверхности конуса.

Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема призмы.

161. (КГУ, ВМК, 1978 г.). В данный конус вписан цилиндр с наибольшей боковой поверхностью. Найдите отношение высоты конуса к высоте этого цилиндра.

162. (КГУ, ВМК, 1978 г.). В данный конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение радиуса основания конуса к радиусу основания этого цилиндра.

163. (МВТУ, 1979 г.). В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр так, что одно его основание лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания принадлежит боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

164. (КГУ, РФФ, 1980 г.). Все ребра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют равные длины, все плоские углы при вершине A конгруэнтны. Точки K и L — середины ребер $[AA_1]$ и $[AB]$. Где на ребре $[AC]$ нужно выбрать точку M, чтобы площадь треугольника KLM была наименьшей?

165. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1980 г.). Через точку N (2; 4) проведена прямая; отрезок ее с отрезками осей координат ($x > 0$; $y > 0$) образует прямоугольный треугольник. Чему должна быть равна длина наибольшего катета, чтобы площадь треугольника была минимальной?

166. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1981 г.). Лодка находится в точке Q озера, отстоящей от ближайшей точки A на берегу на 6 км. Лодочник должен попасть в точку B, находящуюся на берегу на расстоянии 11 км от A. Скорость лодки 3 км/ч, скорость ходьбы лодочника по берегу 5 км/ч. Лодочник подсчитал, что если он сперва доплывет до точки C, которая находится между A и B, а затем сразу же пешком направится в точку B, то на путь от Q до B он потратит наименьшее время. Найдите расстояние от A до C, считая, что лодка движется прямолинейно и берег озера — прямая линия.

167. (РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). Автомобиль едет из пункта A в пункт C. От пункта A до пункта B, расположенного между A и C, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте B он уменьшает свою скорость на a км/ч ($0 < a < 48$) и с этой скоростью едет 1/3 часть пути от B до C. Оставшуюся часть пути от B до C он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает первоначальную скорость (48 км/ч). При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от B до C?

§ 3. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

1. (КГУ, геофак, 1977 г.). Исследуйте функцию $y = 3x^2 - 6x + 5$ и постройте ее график. Каковы наибольшее и наименьшее значения этой функции в промежутке [0; 2]?

2. (МТИПП, 1978 г.). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+2$ на отрезке $[-1; 3]$ и постройте на этом отрезке ее график.

3. (МИНХ, 1979 г.). Исследуйте функцию $y=x^3-3x+2$ и постройте ее график.

4. (МАТИ, 1979 г.). Исследуйте функцию $y=x^3-4x^2-3x+12$ и постройте ее график.

5. (МГРИ, 1977 г.). Дана функция $y=x^3-9x+1$. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте график.

6. (МЭИ, 1979 г.). Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=x-\frac{12}{5}x^2-\frac{1}{3}x^3$ и постройте ее график.

7. (МЭИ, 1979 г.). Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=\frac{1}{15}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{1}{2}x$ на отрезке $[-2; 1]$ и постройте ее график на указанном отрезке.

8. (МЭИ, 1978 г.). Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{x^3-5x^2-8x}{3}$ и постройте ее график.

9. (МАИ, 1979 г.). Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $y=(x^3-4x)/4$ и постройте ее график. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и прямой $y=2(2+x)$.

10. (МАИ, 1979 г.). Постройте график функции $y=x(x^2+3x+2)$. Напишите уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x_0=0$. Найдите координаты точек пересечения касательной с графиком функции.

11. (МАИ, 1979 г.). Постройте график функции $y=(x^2+x)\times(x-2)$. Напишите уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x_0=0$. Найдите координаты точек пересечения касательной с графиком функции.

12. (МАМИ, 1979 г.). Исследуйте функцию $y=(x^4-2x^2)/4$ с помощью производной и постройте ее график.

13. (МГРИ, 1979 г.). Дана функция $y=(6x^2-x^4)/9$; исследуйте функцию и начертите эскиз графика.

14. (МГРИ, МТИММП, 1977 г.). Дана функция $y=x^4-2x^2+5$; исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график.

15. (МГРИ, 1979 г.). Дана функция $y=x^4-10x^2+9$; исследуйте функцию и постройте эскиз графика.

16. (МИНХ, 1978 г.). Дана функция $y=(x-1)^2(x-2)^3$. Исследуйте ход изменения этой функции и постройте ее график.

17. (МГРИ, 1979 г.). Дана функция $y=x^2/(x-2)$; исследуйте функцию и начертите эскиз графика.

18. (МГРИ, 1979 г.). Дана функция $y=(-x^2+3x-1)/x$; исследуйте функцию и начертите эскиз графика.

19. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Исследуйте функцию $y=(x^3-4)/(x-1)^3$ и постройте ее график. Сколько корней имеет уравнение $(x^3-4)/(x-1)^3=c$?

20. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Исследуйте функцию $y=(x^3+4)/(x+1)^3$ и постройте ее график. Сколько решений имеет уравнение $(x^3+4)/(x+1)^3=c$?

21. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Исследуйте функцию $y=8(x^3+x)/(2x-1)^3$ и постройте ее график. Сколько корней имеет уравнение $8(x^3+x)/(2x-1)^3=c$?

22. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Исследуйте функцию $y=8(x^3+x)/(2x+1)^2$ и постройте ее график. Сколько корней имеет уравнение $8(x^3+x)/(2x+1)^3=c$?

23. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Исследуйте функцию $y=(x^4-8)/(x+1)^4$ и постройте ее график. Сколько корней имеет уравнение $(x^4-8)/(x+1)^4=c$?

Постройте графики функций, проведя полное исследование (24—28).

24. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. 25. $y=(1{,}3)^{-2x}\sin^2 x$.

26. $y=\arcsin(2x/(1+x^2))$.

27. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). $y=|x^2-4x+3|+2x$.

28. (МИИВТ, 1982 г.). $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2$.

29. (МИСиС, 1978 г.). Постройте график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, $x>0$.

§ 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛ. ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРАПЕЦИЙ

Найдите $F(x)$ по данной $F'(x)$ (1—7).

1. (МВМИ, 1977 г.). $F'(x)=4x+1$ и $F(-1)=2$.

2. (МВМИ, 1977 г.). $F'(x)=3x^2-4x$ и $F(0)=1$.

3. (МХТИ, 1979 г.). $F'(x)=7x^2-2x+3$, график которой проходит через точку $M(1;\ 5)$.

4. (МХТИ, 1977 г.). $F'(x)=1+x+\cos 2x$, $F(0)=1$.

5. (МХТИ, 1979 г.). $F'(x)=\sin 2x+3x^2$, $F(0)=2$.

6. (МТИМБО, 1980 г.). $F'(x)=1/\sin^2 x$, график которой проходит через точку $A(\pi/6;\ 0)$

7. (ТбГУ, мехмат., спец. прикладная матем., 1981 г.). $F'(x)=2\sin 5x+3\cos(x/2)$, которая при $x=\pi/3$ равна нулю.

Вычислите интеграл (8—10).

8. (МИИГАиК, 1978 г.). $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2(x/5)}$.

9. (КГУ, ЭКФ, 1978 г.). $\displaystyle\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4}\operatorname{ctg}^2 2x\,dx$.

10. (МТИМБО, 1981 г.). $\displaystyle\int\limits_0^{3}\left[3^{1-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\right]dx$.

11. (МГУ, биофак, 1978 г.). Найдите числа A и B такие, чтобы функция $f(x)=A2^x+B$ удовлетворяла условиям $f'(1)=2$, $\int\limits_0^3 f(x)\,dx=7$.

12. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Найдите все значения a, удовлетворяющие уравнению $\int\limits_0^2 (t-\log_2 a)\,dt=2\log_2\left(\frac{2}{a}\right)$.

13. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Найдите все числа $b>1$, для которых $\int\limits_1^b (b-4x)\,dx\geqslant 6-5b$.

14. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Найдите все числа α, для которых $\int\limits_1^2 [\alpha^2+(4-4\alpha)x+4x^3]\,dx\leqslant 12$.

15. (МВТУ, 1978 г.). Определите, при каких $\alpha>0$ выполняется неравенство $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^x\,dx>\frac{3}{2}$.

16. (МИСиС, 1978 г.). При каких $a<0$ выполняется неравенство $\int\limits_a^0 (3^{-2x}-2\cdot 3^{-x})\,dx\geqslant 0$?

Найдите площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями (**17—97**).

17. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=2x-x^2$, $y=0$.
18. (МГУ, физфак, 1977 г.). $y=3x+18-x^2$, $y=0$.
19. (МТИЛП, 1977 г.). $y=4x-x^2$ и осью Ox.
20. (МИНХ, 1978 г.). $y=1+x^2$, $y=2$.
21. (МСИ, 1977 г.). $y=0$, $y=2x^2+1$, $x=-1$, $x=1$, сделайте рисунок.
22. (МФИ, 1979 г.). $y=x^2$ и $y=x+2$.
23. (МГУ, почвенный фак, 1978 г.). $y=x^2-x$, $y=3x$.
24. (МИНХ, 1979 г.). $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.
25. (МИНХ, 1979 г.). $y=\frac{1}{3}x^2-2x+4$, $y=10-x$, сделайте рисунок.
26. (МАМИ, 1979 г.). $y=x$, $y=2x-x^2$.
27. (МВТУ, 1978 г.). $y=7x-2x^2$, $x+y=7/2$.
28. (МИИГАиК, 1977 г.). $y=x^2$, $y=0$, $x=3$.
29. (МВТУ, 1979 г.). $y=\frac{x^2}{2}-x+2$, $y=x$; $x=0$, сделайте рисунок.
30. (МВТУ, 1979 г.). $y=2(1-x)$, $y=1-x^2$, $x=0$, сделайте рисунок.
31. (МХТИ, 1977 г.). $y=x^2$, $y=2-x$, $y=0$.
32. (МГМИ, 1979 г.). $y=0$, $y=4(x-2)$, $y=(x-1)^2$.

33. (МГМИ, 1979 г.). $x=0$, $y=-2x+4$, осью Ox и $y=x^2+1$.
34. (МГМИ, 1979 г.). $y=0$, $x=0$, $y=-x+1$, $y=2-x^2$.
35. (МИНХ, 1977 г.). $y=x^2$, $y=1+\frac{3}{4}x^2$.
36. (МИЭТ, 1978 г.). $y=x^2$, $y=2x-x^2$.
37. (МИЭТ, 1978 г.). $y=x^2-2x+2$, $y=2+4x-x^2$.
38. (МИТХТ, 1979 г.). $y=x^2+2$, $y=1-x^2$, $x=0$, $x=1$.
39. (МГРИ, 1977 г.). $y=x^3-3x^2-9x+1$, $x=0$, $y=6\,(x<0)$.
40. (МГРИ, 1979 г.). $y=(6x^2-x^4)/9$, $y=1$.
41. (МГРИ, 1979 г.). $y=x^4-10x^2+9$, осью Oy и осью Ox.
42. (МИХМ, 1981 г.). $x^2=4y$, $x+y=3$.
43. (МТИМБО, 1980 г.). $y^2=8x$, $2x-3y+8=0$.
44. (МИИВТ, 1982 г.; МТИМБО, 1982 г.). $y=\cos x$, $y=0$, $x=3\pi/4$, $x=-\pi/4$.
45. (МТИМБО, 1982 г.). $xy=2$, $x+2y-5=0$.
46. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). $y=-x^2$, $y=2e^x$, $x=0$, $x=1$.
47. (СимфГУ, физфак, 1981 г.). $y=x^2$, $y=3x+4$.
48. (МТИМБО, 1979 г.). $y=4/x^2$, $x=1$, $y=x-1$.
49. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1981 г.). $y=x^2-2x+3$, $y=4-2x$.
50. (МТИМБО, 1979 г.). $y=e^x$, $y=0$, $x=2$.
51. (МТИМБО, 1982 г.). $y=x$, $y=-x$ и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке $M\,(3;\ 2)$.
52. (МТИМБО, 1981 г.). $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.
53. (МТИМБО, 1981 г.). $y=1/x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.
54. (МТИМБО, 1982 г.). $y=1/x^2$, $y=0$, $x=1/2$, $x=2{,}5$.
55. (МТИМБО, 1982 г.). $y=\sin((\pi x)/2)$, $y=x^2$.
56. (МГРИ, 1977 г.). $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.
57. (МИЭТ, 1978 г.; МТИМБО, 1982 г.). $y=5/x$, $y=6-x$.
58. (МИХМ, 1977 г.). $xy=3$, $x+y=4$.
59. (МГМИ, 1979 г.). $y=5-x$, $y=6/x$.
60. (МИТХТ, 1979 г.). $y=5/x$, $y=6-x$, $x=6$.
61. (МВТУ, 1979 г.). $y=1/x$, $y=x$, $x=2$, сделайте рисунок.
62. (МИНХ, 1979 г.). $y=9/x$, $y=x$, $x=9$, $y=0$.
63. (МГРИ, 1979 г.). $y=x^2$, $y=0$, $x=4$, $y=x^2/(x-2)$.
64. (МГРИ, 1979 г.). $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$, $x=1$, $x=2$ и осью Ox.
65. (МАДИ, 1977 г.). $y=2\sqrt{x}$, $6-y=0$, $x=0$.
66. (МГМИ, 1979 г.). $y=0$, $y=-x+2$, $y=\sqrt{x}$.
67. (МИСиС, 1978 г.). $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$.
68. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.
69. (МИЭТ, 1978 г.). $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

70. (МИИГАиК, 1977 г.). $y=\sin x$, $y=0$, причем $0\leqslant x\leqslant\pi$.

71. (МАМИ, 1979 г.). $y=\sin 6x$, $x=0$, $x=\pi$ и осью абсцисс.

72. (МВТУ, 1979 г.). $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=0$ $(x\geqslant 0)$, сделайте рисунок.

73. (МВТУ, 1978 г.). $y=\cos x$, $y=1+\frac{2}{\pi}x$, $x=\frac{\pi}{2}$.

74. (МИИГАиК, 1978 г.). $y=1/\cos^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.

75. (КГУ, РФФ, 1977 г). $y=4\sin^2 x(1+\cos^2 x)$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и осью абсцисс.

76. (КГУ, РФФ, 1977 г.). $y=2\cos^2 x(1+\sin^2 x)$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ и осью абсцисс.

77. (КГУ, РФФ, 1977 г.). $y=8\sin^4 x+4\cos 2x$ на промежутке $[0;\ \pi]$ и осью абсцисс.

78. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $y=|4-x^2|/4$ и $y=7-|x|$.

79. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $y=2-|2-x|$ и $y=3/|x|$.

80. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $y=4-\frac{6}{|1+x|}$ и $y=|-x+2|$.

81. (КГУ, мехмат, 1977 г.). $y=3-|3-x|$ и $y=6/|x+1|$.

82. (ХГУ, мехмат, 1978 г.). $x=-1$, $x=2$,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2, & x\leqslant 1, \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$$

и осью абсцисс.

83. (МГУ, биофак, 1977 г.). $y=0{,}5x^2-2x+2$ и касательными к ней в точке $(1;\ 1/2)$: $y=-x+1{,}5$, и в точке $(4;\ 2)$: $y=2x-6$.

84. (КГУ, физфак, 1977 г.). $y=2x^2-8x$, касательной к этой параболе в ее вершине и осью ординат.

85. (КГУ, физфак, 1977 г.). $y^2=-x-16$ и касательными к этой параболе, проведенными из начала координат.

86. (КГУ, физфак, 1977 г.). $y=x^2+10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки $(0;\ 1)$.

87. (МВТУ, 1979 г.). $y=x^2-2x+2$, касательной к этой линии, проведенной в точке пересечения ее с осью ординат, и прямой $x=1$.

88. (МГМИ, 1979 г.). $y=2x^2$, осью Ox и касательной к кривой $y=2x^2$ в точке A $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=2$.

89. (МГМИ, 1979 г.). $y=x^2+3$, осями координат и касательной к кривой $y=x^2+3$ в точке A $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=2$.

90. (МГМИ, 1979 г.). $x=-1$, $y=0$, $y=x^2+x+1$ и касательной к кривой $y=x^2+x+1$ в точке $A(x_0;\ y_0)$, где $x_0=1$.

91. (МИНХ, 1979 г.). $y=1/x$, $x=1$ и касательной к линии $y=1/x$, проведенной в точке $x=2$.

92. (МГМИ, 1979 г.). $y=0$, $x=6$, $y=4/x$ и касательной к кривой $y=4/x$ в точке A $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=2$.

93. (МИЭТ, 1978 г.). В некоторой точке графика функции $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Вы-

числите площадь фигуры, ограниченной этой касательной и прямыми $y=0$, $x=1/4$.

94. (МГРИ, 1979 г.). $y=x^2-x+2$ и касательной к кривой $y=\ln x+3$ в точке с абсциссой $x=1$.

95. (МИЭТ, 1979 г.). $y=e^{3x}$, $x=3$ и прямой, являющейся касательной к линии $y=e^{3x}$ в точке с абсциссой $x=0$.

96. (МИЭТ, 1979 г.). $y=\sin x\,(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$, $y=0$, $y=1$ и прямой, являющейся касательной к линии $y=\lg x$ в точке с абсциссой $x=1$.

97. (МИЭТ, 1979 г.). $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$, $y=0$, $x=0$ и прямой, являющейся касательной к линии $y=\cos x$ в точке $x=\pi/4$.

Найдите площади фигур, заданных на координатной плоскости неравенствами (**98—103**).

98. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|y|+\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{1-|x|}$.

99. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|y|+\frac{1}{2}\leqslant e^{-|x|}$.

100. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y)$.

101. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $|y|+2|x|\leqslant x^2+1$.

102. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$.

103. (КГУ, ВМК, 1978 г.). $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$.

104. (МИЭТ, 1978 г.). Через точку пересечения кривой $y=2x^2+4x-3$ с осью ординат проведена касательная к этой кривой. Вычислите площадь фигуры, ограниченной этой касательной и прямыми $y=0$, $x=0$.

105. (МАТИ, 1979 г.). Обозначим через $S(k)$ площадь, заключенную между параболой $y=x^2+2x-3$ и прямой $y=kx+1$. Найдите $S(-1)$ и вычислите наименьшее значение $S(k)$.

106. (МИЭТ, 1978 г.). На плоскости задана точка M (1/2; 1). Проходящая через точку прямая образует с положительными полуосями координат треугольник. Какое минимальное значение может принимать площадь этого треугольника?

107. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Фигура ограничена линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. В какой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функций $y=x^2+1$ надо провести касательную к нему так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади?

108. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Фигура ограничена линиями $y=1/x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. В какой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=1/x$ надо провести касательную к нему так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади?

109. (МГУ, общая геология, 1977 г.). Найдите значение параметра p $(p<0)$, при котором площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(1+p^2)^2x^2+p$ и прямой $y=0$, достигает наибольшего значения.

110. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Фигура ограничена линиями $y=(x+3)^2$, $y=0$, $x=0$. Под какими углами к оси Ox надо провести прямые через точку (0; 9), чтобы они разбивали фигуру на три равновеликие части?

111. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Фигура ограничена линиями $y = |\sin(\pi x/2)|$, $y=0$, $x=-1$. Под какими углами к оси Ox надо провести прямые через точку (0; 0), чтобы они разбивали фигуру на три равновеликие части?

112. (МЭСИ, 1977 г.). Равносторонний треугольник со стороной 10 см вращается около внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найдите объем тела вращения.

113. (МИХМ, 1977 г.). Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 9 см. При вращении треугольника вокруг одного из катетов образуется конус максимального объема. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.

Раздел III
ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В этом разделе представлены задачи по элементам векторной алгебры, изучаемым в средней школе, и геометрии. Задачи по элементам векторной алгебры направлены на то, чтобы проверить знание таких понятий как вектор, координаты вектора в данной системе координат, скалярное произведение векторов. Эти задачи носят, как правило, вычислительный характер. Однако отметим, что понятия и методы векторной алгебры часто можно эффективно использовать и при решении чисто геометрических задач.

Остановимся подробнее на задачах по геометрии. Часто геометрическая задача является наиболее трудоемкой частью письменного вступительного экзамена, так как задача по геометрии всегда многопланова. Здесь нужно выполнить построение необходимых элементов фигуры (прямых, сечений и т. д.), сделать чертеж, дать доказательство необходимых соотношений между данными и построенными элементами фигуры (перпендикулярность, параллельность прямых и плоскостей и т. п.) и, основываясь на этих соотношениях, провести вычисления искомых в задаче величин. При этом основным моментом при решении геометрической задачи является четкое обоснование необходимых соотношений между элементами фигуры, основанное на теоремах курса геометрии. Здесь проверяется знание теоретического материала, умение применить его к решению задач. Именно поэтому задачи на доказательство, а также небольшое количество задач на построение выделены в отдельные параграфы. Хотя эти задачи в «чистом виде» довольно редко встречаются в вариантах вступительных работ, но, как уже отмечалось, они являются неотъемлемой частью решения всякой геометрической задачи. Кроме того, решение этих задач, несомненно, будет способствовать углублению знания теоретического курса геометрии и окажет неоценимую помощь при подготовке к устному экзамену по математике.

§ 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вычислить скалярное произведение векторов (**1**—**4**).

1. $\boldsymbol{a}=\{2;\ 4;\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{3;\ 5;\ 7\}$.

2. (МИИГАиК, 1978 г.). $\boldsymbol{a}=\{-2;\ 3;\ 11\}$, $\boldsymbol{b}=\{5;\ 7;\ -4\}$.

3. (МЭСИ, 1975 г.). $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

4. (РГУ, мехмат, 1977 г.). $(2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta})\cdot(4\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

5. (МТИМБО, 1980 г.). Разложить вектор $\boldsymbol{d}=\{1;\ 1;\ 1\}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}=\{1;\ 1;\ -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{1;\ -1;\ 0\}$ и $\boldsymbol{c}=\{0;\ 2;\ 3\}$.

6. (МТИМБО, 1981 г.). При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}=\{2,\ 3,\ -4\}$ и $\boldsymbol{b}=\{\alpha;\ -6;\ 8\}$ параллельны?

7. (МТИМБО, 1982 г.). При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}=\{1;\ \alpha;\ -2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{\alpha;\ 3;\ -4\}$ взаимно перпендикулярны?

8. (РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). Зная, что $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=2\pi/3$, найдите, при каком значении α векторы $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

9. (МТИМБО, 1982 г.). При каком значении α векторы $\boldsymbol{l}=\{6;\ \alpha;\ -8\}$ и $\boldsymbol{m}=\{-3;\ -1;\ 4\}$ параллельны?

10. (МИИВТ, 1982 г.). Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол в $120°$, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$. Определите $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

11. (МТИМБО, 1982 г.). Найдите угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{-1;\ 2;\ -2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{6;\ 3;\ -6\}$.

12. (МТИМБО, 1980 г.). Найдите косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=\{1;\ 2;\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{2;\ -1;\ 0\}$.

13. (МИЭТ, 1977 г.). Даны три силы $\boldsymbol{M}=\{3;\ -4;\ 2\}$, $\boldsymbol{W}=\{2;\ 3;\ -5\}$ и $\boldsymbol{P}=\{-3;\ -2;\ 4\}$, приложенные к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих трех сил, когда точка приложения равнодействующей, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1\,(5;\ 3;\ -7)$ в положение $M_2\,(4;\ -1;-4)$.

14. (МИИГАиК, 1978 г.). При каких значениях x векторы $\boldsymbol{a}=\{x;\ 3;\ 4\}$ и $\boldsymbol{b}=\{5;\ 6;\ 3\}$ перпендикулярны?

15. (МИИГАиК, 1978 г.; РГУ, физфак, 1977 г.). Даны три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Докажите, что вектор $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}$.

16. (МИИГАиК, 1978 г.). Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{2;\ 3;\ -5\}$, $\boldsymbol{b}=\{3;0;1\}$ и $\boldsymbol{c}=\{4;\ -3;\ 2\}$. Найдите координаты и длину вектора $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

17. (МЭСИ, 1979 г.). Найдите (в градусах) угол между векторами $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

18. (МГИ, 1977 г.). Найдите угол между векторами $2\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}/2$, если $\boldsymbol{a}=\{-4;\ 2;\ 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 0\}$.

19. (ХГУ, мехмат, 1978 г.). Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi=2\pi/3$. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, вычислите $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

20. (МИИГАиК, 1977 г.). Даны четыре точки $A\ (-2;\ -3;\ 8)$, $B\ (2;\ 1;\ 7)$, $C\ (1;\ 4;\ 5)$, $D\ (-7;\ -4;\ 7)$. Будут ли коллинеарны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

21. (МВМИ, 1977 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{b}=\{3;\ 6;\ 6\}$ и удовлетворяющий условию $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=27$.

22. (МИИГАиК, 1978 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{b}=\{2;\ -1;\ 0\}$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$.

23. (МИЭТ, 1977 г.; МТИМБО, 1981 г.). Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ и удовлетворяющего условию $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=3$.

24. (МВМИ, 1977 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{b}=\{1;\ -3;\ 1\}$ и удовлетворяющий условию $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=22$.

25. (МИХМ, 1977 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{b}=\{x;\ y;\ z\}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}=\{2\sqrt{2};\ -1;\ 4\}$, если $|\boldsymbol{b}|=10$.

26. (МЭСИ, 1977 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}=\{2;\ 3;\ -1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1;\ -2;\ 3\}$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{c}\cdot(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-6$.

27. (МЭСИ, 1977 г.). Вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}=\{8;\ -10;\ 13\}$, образует с осью Oz острый угол; зная, что $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}$, найдите его координаты. В ответе запишите сумму координат вектора $\boldsymbol{b}$ с точностью до 0,01.

28. (МИИГАиК, 1977 г.). Найдите вектор $\boldsymbol{b}$, зная, что он удовлетворяет условиям: скалярное произведение $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3$, где $\boldsymbol{c}=\{1;\ -1;\ 2\}$, вектор $\boldsymbol{b}$ перпендикулярен $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$, где $\boldsymbol{a}=\{-2;\ -1;\ 1\}$, $\boldsymbol{d}=\{3;\ 5;\ -2\}$.

29. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите косинус угла между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}, \end{cases}$$

если известно, что в прямоугольной системе координат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют вид $\boldsymbol{a}=\{1;\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1;\ -1\}$.

30. (МИЭТ, 1977 г.). Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{3;\ -1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1;\ -2\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1,\ 7\}$. Определите разложение вектора $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

31. (МАТИ, 1979 г.). Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{1;\ -1;\ 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{3;-5;\ 6\}$. Вычислите $\text{пр}_{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

32. (МИЭТ, 1979 г.). Вектор $\boldsymbol{x}$, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=18\boldsymbol{i}-22\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найдите его координаты, зная, что длина вектора $\boldsymbol{x}$ равна 14.

33. (МИЭТ, 1977 г.; МТИМБО, 1982 г.). Вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет следующим условиям: а) $\boldsymbol{x}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-7{,}5\boldsymbol{k}$; б) $\boldsymbol{x}$ образует острый угол с осью Oz; в) $|\boldsymbol{x}|=50$. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$.

34. (МИЭТ, 1979 г.). Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{-1;\ 1;\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{2;\ 0;\ 1\}$. Найдите вектор $\boldsymbol{x}$, если известно, что он компланарен плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=7$.

35. (МИСиС, 1978 г.). В пространстве даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1;\ 1;\ 2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{-1;\ 3;\ 1\}$. Найдите единичный вектор, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и образующий угол $\alpha=\pi/4$ с вектором $\boldsymbol{a}$.

36. (МИЭТ, 1978 г.). Даны три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ коллинеарен $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$.

37. (МАМИ, 1979 г.). Даны вершины треугольника $A(3;\ 2;-3)$;

B (5; 1; —1); C (1; —2; 1). Найдите его внутренний угол при вершине A.

38. (МИТХТ, 1979 г.). Докажите, что точки A (—2; —3), B (—3; 1), C (7; 7), D (3; 0) служат вершинами трапеции. Найдите длину средней линии трапеции.

39. (МАИ, 1979 г.). Треугольник задан координатами своих вершин A (3; 2; —3), B (5; 1; —1) и C (1; —2; 1). Вычислите величину внешнего угла треугольника при вершине A и координаты вектора $\boldsymbol{a}$, сонаправленного с вектором $\overrightarrow{AB}$ и имеющего длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

40. (МИНХ, 1979 г.). Даны три последовательные вершины параллелограмма A (—3; —2; 0), B (3; —3; 1) и C (5; 0; 2). Найдите его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

41. (МАИ, 1979 г.). Треугольник задан координатами своих вершин A (2; 1; 2), B (1; 0; 0) и C $(1+\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{6})$. Вычислите величины углов треугольника и длину медианы m, проведенной к стороне BC.

42. (МИСиС, 1978 г.). В треугольнике ABC точка A (—1; 2; 3) — вершина прямого угла. Найдите координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой (MN), где M (—1; 3; 2), N (1; 1; 3) и $\widehat{ABC}=30°$.

43. (МИЭТ, 1977 г.). В трапеции $ABCD$ вектор $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$. Докажите, что вектор $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$ (а значит и $\overrightarrow{BC}$), и в записи $\boldsymbol{p}=\alpha\overrightarrow{AD}$ найдите коэффициент α.

44. (РГУ, мехмат, спец. матем., механ., 1977 г.). Дан треугольник ABC. Длины векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CD}$, где $[CD]$ — медиана треугольника ABC.

45. (МТИМБО, 1979 г.) Докажите, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нулю.

46. (ТбГУ, физфак, 1978 г.). Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали $[BD]$, которая пересекает прямую $[AD]$ в точке E; Q — точка пересечения диагоналей квадрата. Выразите через векторы $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CQ}$ сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$.

47. (МТИМБО, 1980 г.). Какой угол образуют единичные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что векторы $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны.

48. (РГУ, физфак, 1977 г.). Дан параллелограмм $ABCD$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

49. (РГУ, мехмат, 1977 г.). Дан параллелограмм $ABCD$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AB}$.

50. (МТИМБО, 1979 г.). Зная векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, на которых построен параллелограмм, выразите через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне $\boldsymbol{p}$.

51. (РГУ, мехмат, 1977 г.). Дана трапеция $ABCD$. Длина основания $[AD]$ в три раза больше длины основания $[BC]$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$.

52. (РГУ, мехмат, 1977 г.). В треугольнике проведены медианы $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$. Вычислите $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

53. (МИЭТ, 1977 г.). Дан параллелограмм $ABCD$ ($[AD]\parallel[BC]$, $[AB]\parallel[CD]$). На стороне $[AD]$ выбрана точка K, а на $[AC]$ — точка L так, что $|\overrightarrow{AK}|=|\overrightarrow{AD}|/5$, $|\overrightarrow{AL}|=|\overrightarrow{AC}|/6$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BL}$ коллинеарны, и в записи $\overrightarrow{KL}=\lambda\overrightarrow{BL}$ найдите коэффициент пропорциональности λ.

54. (МИЭТ, 1977 г.). Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $[AD]\parallel[BC]$, K — середина $[BC]$, L — середина $[DC]$. Обозначим $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

55. (МИЭТ, 1978 г.). Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, M — середина $[DE]$, N — середина $[AM]$, P — середина $[BC]$. Разложите вектор $\overrightarrow{NP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

56. (МИНХ, 1979 г.). В треугольнике ABC известны длины сторон $|AB|=6$, $|AC|=8$ и угол $A=90°$; $[AM]$ и $[BN]$ — биссектрисы углов A и B. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.

57. (МИЭТ, 1978 г.). На сторонах $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$.

58. (МИЭТ, 1977 г.; РГУ, 1977 г.). В треугольнике ABC через M обозначена точка пересечения медиан. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{o}$.

59. (МИЭТ, 1977 г.; СимфГУ, матфак, 1982 г.). Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Найдите сумму $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

60. (МИЭТ, 1978 г.). В треугольнике ABC точка M — центр вписанной окружности. Найдите вектор $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$, если $\alpha=|\overrightarrow{BC}|$, $\beta=|\overrightarrow{CA}|$, $\gamma=|\overrightarrow{AB}|$.

61. (МИРЭА, 1979 г.). Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OA}\sin 2\hat{A}+\overrightarrow{OB}\sin 2\hat{B}+\overrightarrow{OC}\sin 2\hat{C}=\boldsymbol{o}$.

62. (МАИ, 1979 г.). Дана прямоугольная система координат с началом в точке O. Прямая пересекает ось абсцисс в точке C, ось ординат в точке A так, что $\widehat{OCA}=\alpha$ и $\alpha>\pi/4$. Точка D — середина $[AC]$, а точка A_1 симметрична точке A относительно прямой (OD). Определите длины сторон треугольника ACA_1, если известны координаты точки C (1; 0).

63. (МАИ, 1979 г.). Дана прямоугольная система координат с началом в точке O. Прямая пересекает ось абсцисс в точке C, ось ординат — в точке A так, что $\widehat{OCA}=\alpha$ и $\alpha>\pi/4$. Точка D — середина $[AC]$, а точка A_1 симметрична точке A относительно прямой (OD). Найдите отношение площадей $\triangle ODC$ и $\triangle OCA_1$.

64. (МАТИ, 1979 г.). Доказать, что точки A (5; 0), B (0; 2) и C (2; 7) являются вершинами прямоугольного треугольника. Найдите его площадь и укажите все перемещения плоскости, переводящие его в треугольник с вершинами (—5; 0), (0; —2) и (—2; —7).

65. (МАТИ, 1979 г.). Доказать, что точки A (3; 0), B (0; 1), C (2; 7) и D (5; 6) являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Вычислите его площадь и укажите все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

66. (МАТИ, 1979 г.). При каких x и y точки с координатами A (2; 0), B (0; 2), C (0; 7) и D (x; y) являются последовательными вершинами равнобочной трапеции $ABCD$? Для каждой из этих трапеций найдите площадь и укажите все перемещения плоскости, переводящие ее в трапецию с вершинами (2; 0), (7; 0), (0; —7) и (0; —2).

67. (МИЭТ, 1979 г.). К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, пересекающихся в этой вершине. Найдите величину равнодействующей этих трех сил.

68. (МИЭТ, 1978 г.). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с нижним основанием $ABCD$, верхним — $A_1B_1C_1D_1$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что на прямой (MM_1), где M и M_1 — соответственно центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, найдется точка O такая, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OM_1}$. Покажите, что $\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{OM_1}$ и найдите λ.

69. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Найдите сумму скалярных произведений векторов, начала которых находятся в центре грани куба, а концы — в вершинах (таких векторов 8). Длина ребра куба равна b.

70. (МИНХ, 1978 г.). В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ плоский угол при вершине — прямой. Точки D и E — середины ребер AC и SB соответственно. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{EC}$.

71. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=x^2-4x+5$ заданы точка A (x_1; y_1)

с абсциссой $x_1=1$ и точка B $(x_2;\ y_2)$ с ординатой $y_2=1$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

72. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на части кривой $y=x^2-2x+3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1;\ y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка $B(x_2;\ y_2)$ с ординатой $y_2=11$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

73. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=2x^2-3x+5$ заданы точка $A(x_1;\ y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка B — точка пересечения этой кривой с кривой $y=2x^2-2x+3$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

74. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=x^2$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{i}=1$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{i}=-2$, где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$.

75. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=2^{x+2}$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{i}=-1$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{i}=2$, где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $-4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

76. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=6/x$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{i}=-2$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{i}=3$, где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$.

77. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y=x^2+x+10$ проведена касательная в точке $A(x_0;\ y_0)$, где $x_0=1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

78. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y=2\sqrt{x}$ проведена касательная в точке $A(x_0;\ y_0)$, где $x_0=1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

79. (МГМИ, 1979 г.). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y=8/x^2$ проведена касательная в точке $A(x_0;\ y_0)$, где $x_0=2$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$.

80. (МАМИ, 1979 г.). Напишите уравнение образа параболы $y=x^2-2x+1$ при параллельном переносе $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

§ 2. ПЛАНИМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Докажите, что угол $\hat{C}$ треугольника ABC будет прямым в том и только в том случае, если длины сторон этого треугольника связаны равенством $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$.

2. (ЯГУ, 1980 г.). У двух выпуклых четырехугольников совпадают середины сторон. Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

3. Докажите, что в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон этого четырехугольника равны.

4. Вокруг трапеции описана окружность. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда данная трапеция равнобочная.

5. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Точки E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами $[AB]$ и $[CD]$. Докажите, что отрезок $[EK]$ параллелен основаниям трапеции.

6. (ЛатвГУ, 1980 г.). Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Докажите, что длина этой окружности равна длине исходной дуги.

7. (МТИЛП, 1978 г.). Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

8. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°. Докажите, что $|a|^3+|b|^3=3|a||b|^2$.

9. В треугольнике длины сторон a, b и c связаны равенством $|a|^2+|b|^2=5|c|^2$. Докажите, что медианы к сторонам a и b взаимно перпендикулярны.

10. Две окружности касаются внешне друг друга в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная (AB), где A и B — точки касания. Докажите, что $\widehat{ACB}=\pi/2$.

11. (ЯГУ, 1980 г). Докажите, что радиус r вписанного в многоугольник круга равен $2S/P$, где S и P — соответственно площадь и периметр многоугольника.

12. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Докажите, что сумма площадей $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ постоянна при любом выборе точки O.

13. $ABCD$ — квадрат. На стороне $[CD]$ взята точка M, K — точка пересечения стороны $[BC]$ с биссектрисой угла $\widehat{BAM}$. Докажите, что $|MA|=|BK|+|DM|$.

14. В прямоугольном $\triangle ABC$ угол $\hat{B}$ прямой, $[BD]$ — высота, опущенная на гипотенузу $[AC]$. Докажите, что $|BD|$ равна сумме радиусов окружностей, вписанных в $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ и $\triangle CDB$.

15. Каждая сторона выпуклого четырехугольника пересекается некоторой окружностью в двух точках, причем длины отрезков сторон, лежащих внутри окружности, равны. Докажите, что в данный четырехугольник можно вписать окружность.

16. Величина одного из углов треугольника равна 30°. Докажите, что длина стороны, противоположной этому углу, равна радиусу описанной окружности.

17. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

18. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше его периметра.

19. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

20. Докажите, что если прямая, соединяющая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобочная.

21. Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, и продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в одной точке.

22. Докажите, что линия центров двух пересекающихся окружностей делит пополам их общую хорду.

23. Докажите, что общие внешние касательные двух окружностей пересекаются на линии центров или параллельны ей; общие внутренние касательные пересекаются на линии центров.

24. Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон постоянна.

25*. Через центр правильного треугольника проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

26. Докажите, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют квадрат.

27. Дан равнобедренный треугольник ABC, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{R(R-2r)}$.

28. Докажите, что расстояние от любой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин.

29. Докажите, что если стороны одной трапеции равны соответствующим сторонам второй трапеции, то эти трапеции равны.

30. Докажите, что в трапеции, диагонали которой служат биссектрисами углов при одном из оснований, длины трех сторон равны.

31. Пусть a и b $(a>b)$ — длины оснований трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции, а его длина равна $(a-b)/2$.

32. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Докажите, что точка O делит пополам отрезок, отсекаемый от прямой боковыми сторонами трапеции.

33. Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Докажите, что верно и обратное утверждение, т. е. если прямая, проходящая через вершину, делит про-

тиволежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то эта прямая — биссектриса.

34. Пусть m, β, h — соответственно медиана, биссектриса и высота треугольника, проведенные к одной и той же стороне треугольника. Докажите, что точка пересечения биссектрисы с этой стороной лежит между точками пересечения медианы и высоты с этой стороной (или ее продолжением). Докажите, что эти точки совпадают в том и только в том случае, если треугольник равнобедренный.

35. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, лежащих против углов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ соответственно, $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что справедливы следующие соотношения:

1) $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$ — теорема синусов;

2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ — теорема косинусов;

3) $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$;

4) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

5) $S=pr$;

6) $R=\frac{abc}{4S}$;

7) если m_a, β_a, h_a — длины медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из $\hat{A}$, то

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2};$$

$$\beta_a=\frac{\sin\hat{B}}{\sin(\hat{A}/2)}\,\frac{ac}{b+c};$$

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

36. Через точку A, лежащую вне круга, проведены две прямые, одна из которых касается окружности, служащей границей круга, в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D. Докажите, что $|AD||AC|=|AB|^2$ (теорема о касательной и секущей).

37. (БашГУ, 1980 г.) В треугольнике высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части. Докажите, что углы этого треугольника по величине равны 30°, 60° и 90°.

38. (МИФИ, 1980 г.). В трапеции сумма углов при большем основании равна 90°. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности длин оснований.

39. Докажите, что при пересечении биссектрис внутренних углов параллелограмма, не являющегося ромбом, получается прямоугольник, длины диагоналей которого равны разности смежных сторон параллелограмма.

40. Докажите, что если в трапеции хотя бы одна из диагоналей в точке пересечения с другой делится пополам, то эта трапеция — параллелограмм.

41. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

42. Докажите, что если длины двух медиан треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

43. Докажите, что если длины двух высот треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

44*. Докажите, что ограниченная фигура не может иметь два центра симметрии.

45. Докажите, что если выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии, то либо около него можно описать окружность, либо в него можно вписать окружность.

46. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

47. Докажите, что в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.

48. В круге диаметра d проведены две взаимно перпендикулярные хорды $[AB]$ и $[CD]$. Докажите, что $|AD|^2+|CB|^2=d^2$.

49. На диаметре круга радиуса 1, как на стороне, построен равносторонний треугольник. Докажите, что площадь части треугольника, находящейся вне круга, равна $(3\sqrt{3}-\pi)/6$.

50. Даны три равных приложенных друг к другу квадрата $ABCD$, $DCEF$, $FEPQ$. Докажите, что $\widehat{CAD}+\widehat{EAF}+\widehat{PAQ}=90°$.

51. Докажите, что биссектрисы внутреннего и прилежащего к нему внешнего углов треугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что верно и обратное утверждение: прямая, проходящая через вершину треугольника перпендикулярно биссектрисе внутреннего угла при этой вершине, является биссектрисой внешнего угла.

52. Дан равнобедренный треугольник. Из произвольной точки P основания восставлен перпендикуляр. Докажите, что сумма длин отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с боковыми сторонами или их продолжениями не зависит от выбора точки P на основании.

53. В ромб, не являющийся квадратом, вписан квадрат. Докажите, что его стороны параллельны диагоналям ромба.

54. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанного и вписанного кругов), причем равенство $R=2r$ имеет место только для правильного треугольника.

55. (МИРЭА, 1978 г.). Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C} \leqslant 3/2$.

56. Пусть a, b, c и d — длины последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь. Докажите, что

1) $(a+c)(b+d) \geqslant 4S$,

2) $ac+bd \geqslant 2S$,

3) $ab+cd \geqslant 2S$,

4) $ad+bc \geqslant 2S$.

57. Через точку M, взятую внутри круга, проведена хорда (AB) (точки A и B лежат на окружности). Докажите, что величина $|AM| \cdot |MB|$ постоянна для всех таких хорд.

Следующие задачи на нахождение геометрических мест точек (т. е. множества всех точек, удовлетворяющих какому-либо требуемому свойству) тесно связаны с задачами на доказательство. При решении этих задач часто бывает удобно использовать координатный метод.

Конечно, задачи на отыскание геометрических мест точек можно решать и чисто геометрическими методами, используя те или иные геометрические теоремы.

58. (КГУ, мехмат, 1977 г.). На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найдите множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до данных прямых равна сумме величин, обратных данным расстояниям.

59. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми равно 1. Найдите множество точек, расстояния которых до двух данных точек относятся как $m:n$.

60. (КГУ, мехмат, 1977 г.). На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найдите множество всех точек плоскости, 1) произведение расстояний от которых до данных прямых равно модулю разности этих расстояний; 2) модуль разности расстояний от которых до данных прямых равен модулю разности величин, обратных к данным расстояниям.

61. На плоскости даны прямая и не лежащая на ней точка. Найдите множество точек, равноудаленных от данной прямой и данной точки.

62. Найдите множество точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B постоянна.

63. Найдите множество точек, сумма расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

64. Найдите множество точек, разность расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

65. Даны два непараллельных отрезка $[AB]$ и $[CD]$. Найдите множество точек M, для которых площади $\triangle AMB$ и $\triangle CMD$ равны.

66. Найдите множество середин хорд, проходящих через данную точку внутри данной окружности.

67. Концы отрезка длины a скользят по сторонам данного прямого угла. Найдите множество точек, пробегаемых серединой данного отрезка.

68. Найдите геометрическое место таких точек плоскости, что касательные, проведенные из этих точек к данной окружности, образуют между собой угол α.

Все построения данного параграфа (если специально не оговорено противное) проводятся только циркулем и односторонней линейкой без делений. Другими словами, мы можем построить окружность, радиус которой равен длине заданного отрезка, с центром в данной точке (циркуль) и через любые две данные точки провести прямую (линейка). Более сложные построения основаны на различных соотношениях между элементами фигур, которые надо построить, и вытекающих из аксиом и теорем планиметрии, и последовательном выполнении указанных двух элементарных построений. Проведем простейшие построения, указывая те теоремы курса планиметрии, на которых они основаны.

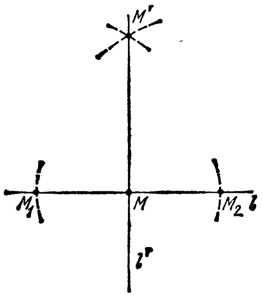


Рис. 1.

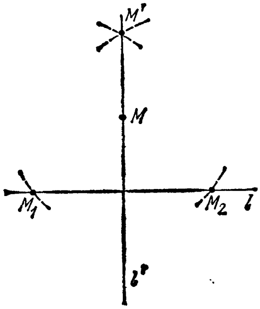


Рис. 2.

Пример 1. Даны прямая l и точка M. Проведите прямую l', проходящую через точку M перпендикулярно прямой l.

Построение. а) Рассмотрим сначала случай, когда $M \in l$ (рис. 1).

1) Построим окружность с центром в точке $M \in l$ какого-либо радиуса $r > 0$. Пусть точки M_1 и M_2 — точки пересечения этой окружности с прямой l. Тогда точка M — середина отрезка $[M_1M_2]$.

2) Построим окружности одного и того же радиуса $R > r$ с центрами в точках M_1 и M_2. Пусть M' — одна из двух точек пересечений этих окружностей. По построению точка M' равноудалена от точек M_1 и M_2, следовательно, она лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка $[M_1M_2]$, т. е. через точку M.

3) Через точки M и M' проводим искомую прямую l'. Построение закончено.

Таким образом, в данном случае мы воспользовались теоремой о перпендикуляре к середине отрезка и, кроме того, что важно отметить, неявно пользуемся теоремой о единственности перпендикуляра к данной прямой, проведенного через данную точку.

б) Пусть теперь $M \notin l$ (рис. 2).

1) Построим окружность с центром в точке M достаточно большого радиуса R (радиус окружности таков, что она пересекает прямую l в двух точках). Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения прямой l с этой окружностью. По построению точки M_1 и M_2 равноудалены от точки M и, следовательно, точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $[M_1M_2]$.

2) Построим окружности одного и того же радиуса $R_1 > R$ с центрами в точках M_1 и M_2. Пусть M' — одна из точек пересечения этих окружностей. Тогда, по построению, M' также равноудалена от M_1 и M_2 и, следовательно, также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $[M_1M_2]$.

3) Через точки M и M' проводим искомую прямую l'.

Здесь мы вновь воспользовались теоремой о серединном перпендикуляре, единственностью этого перпендикуляра. Кроме того, в обоих случаях мы неявно опирались на аксиомы планиметрии, которые нам гарантируют возможность выполнения наших двух элементарных построений (например то, что через две данные точки можно провести и притом единственную прямую). Далее это замечание мы делать больше не будем.

Пример 2. Даны прямая l и точка $M \notin l$. Через точку M проведите прямую l' параллельно прямой l.

Построение (рис. 3).

1) Из точки M опустим на прямую l перпендикуляр l_1. Пусть M_1 — точка пересечения прямых l и l_1.

2) Из какой-либо точки $M_2 \in l$, не совпадающей с точкой M_1, восставим перпендикуляр l_2 к прямой l.

3) Проведем окружность с центром в точке M_2, радиус которой равен $|MM_1|$. Пусть точка M' — точка пересечения этой окружности с прямой l_2, лежащая в той же (относительно прямой l) полуплоскости, что и точка M. Тогда по построению точки M и M' равноудалены от прямой l и лежат в одной полуплоскости. Следовательно, (теорема!) прямая, проходящая через точки M и M', параллельна прямой l.

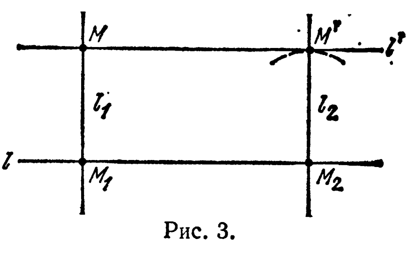


Рис. 3.

4) Проводим через точки M и M' искомую прямую l'.

При проведенном построении мы помимо теорем, использованных в предыдущей задаче, опирались в третьем пункте на теорему, которую можно рассматривать как «признак параллелограмма». В самом деле, отрезки $[MM_1]$ и $[M'M_2]$ параллельны (так как они перпендикулярны прямой l) и равны по длине. Следовательно, четырехугольник MM_1M_2M' — параллелограмм. Отсюда следует, что $l' \parallel l$.

Пример 3. Данный отрезок $[AB]$ разделите пополам.

Построение (рис. 4). Фактически это построение содержится в задаче 1.

1) Проводим окружности, радиус которых равен $|AB|$, с центрами в точках A и B. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения этих окружностей. Они равноудалены от концов отрезка $[AB]$ и, следовательно, обе лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $[AB]$.

2) Через точки M_1 и M_2 проводим прямую l_1. Их точка пересечения C и является искомой точкой.

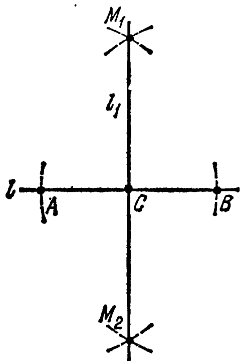


Рис. 4.

Пример 4. Даны: прямая l, точка $O \in l$ и угол $\hat{A}$. От данной прямой l отложите угол,

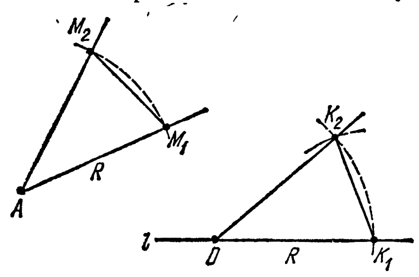


Рис. 5.

конгруэнтный углу $\hat{A}$, так, чтобы его вершина совпала с точкой O, а одна из сторон была направлена вдоль прямой l.

Построение (рис. 5). 1) Из вершины A данного $\hat{A}$ проведем окружность какого-либо радиуса $R > 0$. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения этой окружности со сторонами угла.

2) Строим окружность того же радиуса R с центром в точке O. Пусть K_1 одна из (двух) точек пересечения этой окружности и прямой l. Проводим окружность с центром в K_1, радиус которой равен $|M_1M_2|$. Пусть K_2 — точка пересечения этой окружности и окружности радиуса R с центром в точке O (опять какая-либо одна из двух).

3) Соединяем точки O и K_2. Мы имеем

$$|OK_1| = |OK_2| = |AM_1| = |AM_2|, \quad |K_1K_2| = |M_1M_2|$$

по построению. Следовательно, $\triangle M_1AM_2$ конгруэнтен $\triangle K_1OK_2$. Поэтому построенный угол конгруэнтен данному в условии углу.

Отметим, что мы построили один из четырех углов, удовлетворяющих условию задачи. Вместе с построенным углом условию удовлетворяет угол, симметричный относительно прямой l данному углу, и углы, центрально симметричные этим углам относительно точки O. Кроме того, отдельно следует рассмотреть случай, когда данный угол равен двум прямым. В этом случае сама прямая l с данной на ней точкой O и будет давать требуемое построение.

Пример 5. Даны отрезок $[AB]$ и $\hat{K}$. Постройте множество всех точек C таких, что $\widehat{ACB}$ конгруэнтен данному $\hat{K}$.

Построение (рис. 6).

1) Пусть l — прямая, проходящая через точки A и B. От прямой l в точке A отложим угол $\widehat{BAM}$, конгруэнтный данному $\hat{K}$, и пусть l_1 — прямая, проходящая через точки A и M.

2) Восставим серединный перпендикуляр l_3 к отрезку $[AB]$ (D — середина отрезка $[AB]$) и перпендикуляр l_2 к прямой l_1 в точке A. Пусть точка O — точка пересечения этих перпендикуляров (если угол $\hat{K}$ был прямым, то точка O совпадает с D).

3) Проведем окружность с центром в точке O и радиусом длины $|OA|$; рассмотрим дугу $\breve{AB}$, лежащую в той же полуплоскости (относительно прямой l), что и точка O, с выколотыми точками A и B и симметричную ей относительно l дугу. Объединение этих двух дуг окружностей и даст нам искомое множество точек. В самом деле, взяв произвольную точку C, принадлежащую построенному множеству, мы получим, что $\widehat{ACB}$ измеряется половиной дуги $\breve{AB}$, на которую он опирается (вписанный угол), и угол $\widehat{BAM}$ также измеряется половиной той же дуги (как угол между касательной l_1 к окружности и хордой $[AB]$, проведенной из точки касания). Следовательно, $\widehat{ACB}$ конгруэнтен данному углу $\hat{K}$. Если же взять точку C, не принадлежащую построенному множеству, то условие задачи выполнено не будет (проверьте самостоятельно).

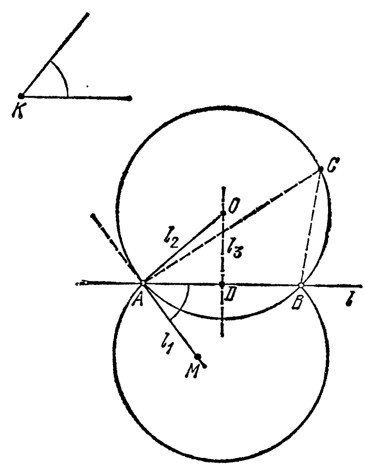


Рис. 6.

В проведенном построении, как мы видим, использовано много теорем планиметрии. Здесь, помимо теорем ранее разобранных задач, мы воспользовались теоремой о вписанном в окружность угле, о касательной и хорде, теоремой о касательной и радиусе, проведенном в точку касания (а именно, мы использовали то, что прямая l_1 будет касательной к окружности с центром в точке O радиуса $|OA|$). Отсюда мы видим, что решение задач на построение способствует активному овладению теоретическим материалом, что принесет ощутимую пользу и при решении «стандартных» конкурсных задач по геометрии.

Рассмотрим еще одну простейшую задачу на построение, опирающуюся на теорему о подобии треугольников.

Пример 6. Даны отрезки $[AB]$ и $[CD]$. Постройте отрезок $[MN]$, длина которого равна среднему геометрическому длин данных отрезков, т. е. $|MN| = \sqrt{|AB| \cdot |CD|}$.

Построение (рис. 7). Данное соотношение между длинами отрезков можно переписать в эквивалентном виде

$$\frac{|AB|}{|MN|} = \frac{|MN|}{|CD|},$$

поэтому эту задачу иногда называют задачей о построении среднего пропорционального двух данных отрезков.

1) На какой-либо прямой l отложим отрезок $[AB]$ и отрезок $[BK]$, конгруэнтный $[CD]$. Пусть O — середина отрезка $[AK]$. Построим окружность с центром в точке O и радиуса $|OK| = |AK|/2 = (|AB| + |CD|)/2$.

2) Из точки B восставим перпендикуляр к прямой l. Пусть E — одна из точек пересечения этого перпендикуляра с построенной окружностью. Тогда $[BE]$ искомый. Это следует из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle EBK$ (проведите рассуждения).

Приведем примеры решения более сложных задач на построение, указав некоторые применяемые при решении таких задач приемы.

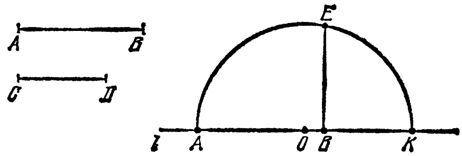


Рис. 7.

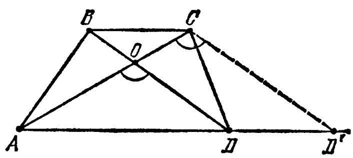


Рис. 8.

Пример 7. Постройте трапецию, если заданы ее диагонали, угол между диагоналями и одна из боковых сторон.

Построение (рис. 8). Проведем анализ решения задачи. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, у которой заданы $[AC]$, $[BD]$ — диагонали, $[CD]$ — одна из боковых сторон, $\widehat{AOD}$ — угол между диагоналями. Продолжим сторону $[AD]$ и отложим отрезок $[DD']$, конгруэнтный отрезку $[BC]$. Тогда в $\triangle ACD'$ заданы две стороны $[AC]$ и $[CD']$ (так как отрезок $[CD']$ конгруэнтен $[BD]$) и угол между ними. Построив этот треугольник и зная отрезок $[CD]$, найдем положение точки D на $[AD']$. Затем проведем через точку C прямую, параллельную прямой (AD'). Имея отрезок $[BD]$ и точку $D \in [AD']$, находим положение точки B. Таким образом, мы построили все четыре вершины искомой трапеции. Мы проследили при анализе задачи все основные этапы построения. Провести построение в деталях теперь не представляет труда. Отметим, что при решении мы использовали прием — параллельный перенос элемента фигуры, а именно, вместо $[BD]$ мы вначале рассматриваем $[CD']$, получаемый из $[BD]$ параллельным переносом.

Пример 8. Дан угол $\hat{A}$ и точка M, лежащая внутри угла. На стороне угла $\hat{A}$ найти точки K и N таким образом, чтобы периметр $\triangle KMN$ был наименьшим.

Построение (рис. 9). Пусть точки M_1 и M_2 симметричны данной точке M относительно сторон данного угла. При любом выборе точек N' и K' на сторонах угла периметр $\triangle K'MN'$ будет равен длине ломаной $M_1N'K'M_2$. Эта длина будет наименьшей, если точки K' и N' лежат на прямой (M_1M_2). Таким образом, в качестве точек K и N мы должны взять точки пересечения прямой (M_1M_2) со сторонами угла. Соответствующие построения не представляют труда. Отметим, что при решении этой задачи использован прием отражения элемента (в данном случае точки) относительно прямой.

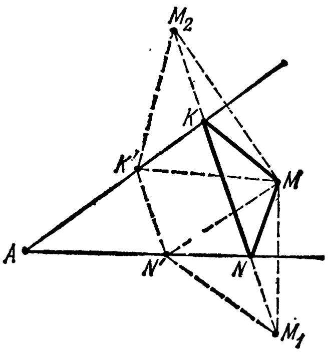


Рис. 9.

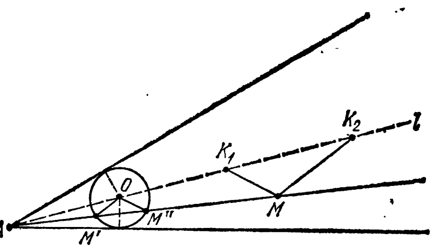


Рис. 10.

Пример 9. Дан угол $\hat{A}$ и точка M, лежащая внутри угла. Постройте окружность, проходящую через данную точку M и касающуюся сторон данного угла.

Построение (рис. 10). Отметим, что центры всех окружностей, касающихся сторон данного угла, лежат на биссектрисе этого угла. Пусть l — биссектриса угла $\hat{A}$. Возьмем точку $O \in l$ и построим окружность с центром в этой точке, касающуюся сторон угла $\hat{A}$. Пусть M' и M'' — точки пересечения этой окружности с прямой (AM). Через точку M проводим прямые, параллельно отрезкам $[OM'']$ и $[OM']$, и пусть K_1 и K_2 — точки пересечения этих прямых с биссектрисой угла $\hat{A}$. Эти точки K_1 и K_2 и являются центрами искомых окружностей (проведите самостоятельно полное доказательство и все необходимые построения). При решении этой задачи мы использовали прием преобразования гомотетии с центром в данной точке.

В треугольнике ABC буквами a, b, c обозначаются стороны, лежащие против $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ соответственно; m_a, m_b, m_c — медианы, h_a, h_b, h_c — высоты, β_a, β_b, β_c — биссектрисы, проведенные к соответствующим сторонам; P — отрезок, длина которого равна периметру данного $\triangle ABC$; R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей.

Постройте $\triangle ABC$ по следующим элементам[1]) (1—40).

1. $a, \hat{A}, \hat{B}$. **2.** $a, b, \hat{A}$. **3.** $a, \hat{B}, h_a$. **4.** $a, \hat{A}, h_a$.

5. $a, \hat{A}, h_b$. **6.** $a, \hat{B}, h_b$. **7.** a, h_a, h_b. **8.** a, h_b, h_c.

9. a, b, m_a. **10.** a, b, m_c. **11.** $a, \hat{A}, m_a$. **12.** $a, \hat{A}, m_b$.

13. $a, \hat{B}, m_c$. **14.** $a, \hat{B}, m_b$. **15.** a, m_a, m_b. **16.** a, m_b, m_c.

17. m_a, m_b, m_c. **18.** $a, \hat{B}, \beta_c$. **19.** $a, \hat{B}, \beta_b$. **20.** a, β_b, β_c.

21. $a, \hat{A}$ и точке $M \in a$, через которую проходит β_a.

22. $P, \hat{A}, \hat{B}$. **23.** $P, \hat{A}, r$. **24.** a, h_b, m_a.

25. $a, m_a, |b|/|c|$, где $|b|$ — длина отрезка b (т. е. предполагается, что заданы какие-либо два отрезка, длины которых относятся как $|b|:|c|$).

26. $\hat{A}, r$ и радиусу одной из вневписанных окружностей.

27. $a, \hat{A}$ и отрезку длины $||b|^2-|c|^2|$.

28. $\hat{A}, h_a$ и отношению длин отрезков, на которые высота h_a делит основание a.

29. a, h_a и углу, величина которого равна разности величин $\hat{B}$ и $\hat{C}$.

30. h_a, m_a, β_a.

31. Вершине B, центру описанного круга и центру тяжести (т. е. точке пересечения медиан).

32. h_b, h_c, m_a. **33.** $a, b+c, \hat{A}$. **34.** $a, b+c, \hat{B}$.

35. $a, b+c, \hat{B}+\hat{C}$. **36.** $a, b-c, \hat{A}$. **37.** $a, b-c, \hat{B}$.

38. Центру тяжести и серединам двух средних линий.

39. Центру тяжести, центру описанного круга и одной из вершин.

40. Точкам пересечения высот с описанной окружностью.

41. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

42. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане катета.

43. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по его периметру.

44. Постройте трапецию, зная ее основания и боковые стороны.

45. Постройте параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.

46. Постройте квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

---

[1]) Предполагается, что данные таковы, что соответствующие построения выполнимы.

47. Постройте четырехугольник $ABCD$, зная все его стороны и угол между продолжениями сторон $[AB]$ и $[CD]$.

48. В данный треугольник впишите квадрат.

49. В данный треугольник впишите прямоугольник а) с заданной диагональю, б) с наименьшей диагональю.

50. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого параллельны трем данным прямым.

51. В данный выпуклый четырехугольник впишите параллелограмм.

52. Дан угол и точка M внутри него. Через точку M проведите прямую так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой в отношении $2:3$.

53. Дан угол и точка M, лежащая вне него. Через точку M проведите прямую так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник данного периметра.

54. Дан круг. Постройте его центр.

55. Даны две окружности. Постройте их общие касательные.

56*. Постройте окружность данного радиуса, 1) касающуюся двух данных прямых; 2) касающуюся данной прямой и данной окружности; 3) касающуюся двух данных окружностей.

57. Даны две окружности и их общая внешняя касательная. На касательной найдите точку так, чтобы сумма углов, под которыми видны окружности из этой точки, была равна данному углу.

58. Даны отрезки длины a и b. Постройте отрезки, длины которых равны а) $\sqrt{ab}$; б) $\sqrt{a^2-ab+b^2}$; в) $\sqrt{a^2-4ab+7b^2}$.

59. Дан круг и точка внутри него. Проведите через данную точку хорду заданной длины.

60*. Даны две окружности. Проведите общую секущую таким образом, чтобы части ее, заключенные внутри окружностей, были равны данному отрезку.

61. В окружность впишите прямоугольный треугольник, зная его острый угол и точку, через которую проходит один из катетов.

62. Даны две концентрические окружности. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данных концентрических окружностей.

63*. Даны три концентрические окружности. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого принадлежат этим окружностям.

64. На данной окружности найдите точку M так, чтобы расстояния от M до сторон данного угла относились как $2:3$.

65*. Через точку пересечения двух данных окружностей проведите прямую так, чтобы окружности высекали на этой прямой равные хорды.

66*. Дан треугольник и точка, принадлежащая одной из его сторон. Через данную точку проведите две прямые так, чтобы они разбили треугольник на три равновеликие части.

67. В угол величины α радиан вписана окружность радиуса R. Между вершиной угла и центром круга проводится касательная к этой окружности так, что отсекаемый ею от угла треугольник имеет наибольшую площадь. Выполните построение и вычислите площадь отсеченного треугольника.

68. Дан треугольник. Постройте равновеликий ему квадрат.

69. В $\triangle ABC$ проведите секущую (DE) так, чтобы $|AD| = |DE| = |EC|$ $(D \in [AB], E \in [BC])$.

70*. Впишите в остроугольный треугольник $\triangle ABC$ треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны сторонам данного. Докажите, что таких треугольников два.

71*. Рассеките трапецию прямой, параллельной основаниям, так, чтобы отрезок ее внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

72. Впишите квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде.

73. Постройте квадрат так, чтобы две его вершины лежали на данной прямой, а две другие — на данной окружности.

74. Дана прямая (CD) и две точки A и B, не лежащие на ней. Найдите на прямой такую точку M, что 1) $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$; 2) $2\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

75. Около равностороннего треугольника опишите квадрат так, чтобы обе фигуры имели общую вершину.

76. Даны три луча, выходящие из одной точки. Проведите прямую, проходящую через данную точку так, чтобы длины отрезков, отсекаемых на ней лучами, относились как 3:5.

Выполните следующие построения с ограниченными возможностями (77—81).

77. С помощью одного циркуля разделите данный отрезок пополам.

78. Дан «египетский» треугольник с длинами сторон 3, 4 и 5 см. С помощью одного циркуля впишите в него окружность.

79. Пользуясь только двусторонней линейкой, разделите данный угол пополам.

80. Дан угол в 19°. С помощью одного циркуля постройте дугу в 7°.

81. Разделите циркулем и линейкой угол в 54° на три равные части.

§ 4. ПЛАНИМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Приведем основные «вычислительные» формулы и некоторые утверждения, часто используемые при решении планиметрических задач (см. также задачи § 2).

I. Пусть a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$, лежащих, соответственно, против углов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$; $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр,

S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной в этот треугольник окружностей, h_a, m_a, β_a — длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенных к стороне, противолежащей углу $\hat{A}$. Справедливы следующие утверждения.

1) Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\hat{A}}=\dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}=2R.$

2) Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$. В частности, если $\hat{A}$ прямой, то получаем теорему Пифагора.

3) Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{ — формула Герона;}$$

$$S=pr;\quad S=\frac{abc}{4R}.$$

4) Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей строго внутри треугольника (центр тяжести). Точка пересечения делит медианы на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от соответствующей вершины.

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\hat{B}};\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}.$$

5) Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей строго внутри треугольника. Точка пересечения биссектрис равноудалена от сторон треугольника (центр вписанной окружности).

Биссектриса при пересечении делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\beta_a=\frac{\sin\hat{B}}{\sin(\hat{A}/2)}\cdot\frac{ac}{b+c}.$$

6) Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр).

$$h_a=b\sin\hat{C};\quad h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

7) Три перпендикуляра, восставленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной окружности.

$$R=\frac{abc}{4S};\quad R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}=\frac{b}{2\sin\hat{B}}=\frac{c}{2\sin\hat{C}};$$

$$r=\frac{S}{p}=\left[\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c)\right]^{1/2}.$$

II. Пусть a, b — длины смежных сторон параллелограмма $ABCD$, $\widehat{A}$ — величина угла между этими сторонами, h_a — высота, опущенная на сторону длины a, d_1 и d_2 — длины диагоналей, S — площадь параллелограмма. Справедливы следующие утверждения.

1) $h_a = b \sin \widehat{A}$.

2) $S = ah_a = ab \sin \widehat{A}$.

3) $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{A}$.

$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \widehat{A}$.

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

4) Точка пересечения диагоналей параллелограмма является центром симметрии параллелограмма. Отсюда, в частности, следует, что диагонали делятся точкой пересечения пополам.

5) Параллелограмм можно вписать в окружность в том и только в том случае, если он является прямоугольником.

6) В параллелограмм можно вписать окружность в том и только в том случае, если он является ромбом.

III. Пусть a и b — длины оснований трапеции, c и d — длины ее боковых сторон, h — высота, S — площадь трапеции. Справедливы следующие утверждения.

1) $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.

2) В трапецию можно вписать окружность в том и только в том случае, если $a + b = c + d$.

3) Трапецию можно вписать в окружность в том и только в том случае, если она равнобочная.

IV. Пусть, наконец, R — длина радиуса некоторого круга, S — его площадь, l — длина окружности, являющейся границей данного круга. Тогда $l = 2\pi R$, $S = \pi R^2$.

1. (МЭСИ, 1979 г.). Длина одного из катетов прямоугольного треугольника больше длины другого на 10 см, но меньше длины гипотенузы на 10 см. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

2. (МИНХ, 1977 г.). В треугольнике ABC $[BD]$ — медиана, $|BD| = |AB|\sqrt{3}/4$, а $\widehat{DBC} = \pi/2$. Найдите величину угла $\widehat{ABD}$.

3. (МХТИ, 1977 г.). В треугольнике длина основания на 4 см меньше длины высоты, а площадь этого треугольника равна 96 см². Найдите длины основания и высоты треугольника.

4. (МИЭТ, 1977 г.). Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 12 см. Вычислите длину медианы, проведенной к большей стороне.

5. (МИЭТ, 1977 г.). Длина основания равнобедренного треугольника равна a, а величина угла при вершине — α. Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

6. (МГИ, 1977 г.). В равнобедренном треугольнике величина угла при вершине равна α, а площадь его равна S. Найдите длину основания треугольника.

7. (МЭСИ, 1979 г.). В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$ см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

8. (МИЭТ, 1977 г.). Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

9. (МЭСИ, 1979 г.). Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону $[MP]$ на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Определите периметр треугольника MNP, если $|MN|-|NP|=18$.

10. (МАИ, 1977 г.). В треугольнике ABC известны отношения длин сторон $[BC]$ и $[AC]$ к радиусу описанной окружности, равные, соответственно, 2 и 1,5. Найдите отношение длин биссектрис внутренних углов $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$.

11. (МАИ, 1975 г.). В треугольнике ABC длина стороны $[AB]$ равна 2 см. Из вершины B к стороне $[AC]$ проведена медиана $[BD]$, длина которой равна 1 см. Найдите площадь треугольника ABC, если $\widehat{BDA}=30°$.

12. (БашГУ, 1980 г.). Найдите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

13. (МИНХ, 1977 г.). В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон $[BC]$ и $[CD]$ соответственно. Найдите $\widehat{MAN}$, если $\widehat{BAD}=60°$.

14. (МЭСИ, 1977 г.). Периметр ромба равен 48, а сумма длин диагоналей равна 26. Найдите площадь этого ромба.

15. (МАИ, 1979 г.). Найдите величину угла между диагоналями прямоугольника с периметром $2p$ и площадью $\frac{3}{16}p^2$.

16. (МИНХ, 1978 г.). В квадрате $ABCD$ точка M — середина $[BC]$, а O — точка пересечения $[DM]$ и $[AC]$. Найдите величину угла $\widehat{MOC}$.

17. (МИНХ, 1979 г.). Средняя линия трапеции равна 10 см и делит плошадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

18. (МАИ, 1977 г.). В равнобочной трапеции $ABCD$ длина боковой стороны $[AB]$ и меньшего основания $[BC]$ равны 2 см и $[BD]\perp[AB]$. Вычислите площадь этой трапеции.

19. (МВМИ, 1977 г.). В параллелограмме $ABCD$ величина угла BAD равна $\pi/3$, а длина стороны $[AB]$ равна 3 см. Биссектриса угла A пересекает сторону $[BC]$ в точке E. Найдите площадь треугольника ABE.

20. (ЛьвГУ, 1980 г.). Параллелограмм с периметром 44 см разделен диагоналями на 4 треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6 см. Определите длины сторон параллелограмма.

21. (МИЭТ, 1977 г.). Дан параллелограмм, в котором величина острого угла равна 60°. Найдите отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов длин диагоналей равно 1/3.

22. (МАИ, 1979 г.). В трапеции длины оснований равны 5 см и 15 см, а длины диагоналей — 12 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

23. (МИЭТ, 1977 г.). Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой, соединяющего середины ее диагоналей.

24. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная длину ее диагонали l и величину угла α между этой диагональю и бо́льшим основанием.

25. (МФТИ, 1977 г.). В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$) расстояние от вершины A до прямой (CD) равно длине боковой стороны. Найдите величины углов трапеции, если $|AD|:|BC|=5:1$.

26*. (БГУ, 1980 г.). Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

27. (МФТИ, 1977 г.). В прямоугольной трапеции отношение длин оснований равно 4, а отношение длин диагоналей равно 2. Найдите величину острого угла трапеции.

28. (МГУ, геолог. фак. 1975 г.). Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Известно, что $|AD|=10$ см, $|BC|=2$ см, $|AB|=|CD|=5$ см. Биссектриса угла BAD пересекает луч $[BC)$ в точке K. Найдите длину биссектрисы угла ABK в треугольнике ABK.

29. (МГУ, геофак, 1977 г.). В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса $[AD]$ острого угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $|AO|:|OD|=(\sqrt{3}+1):(\sqrt{3}-1)$. Найдите величины острых углов треугольника.

30. (МГУ, географ. фак., 1977 г.). В треугольнике ABC сторона $[AB]$ имеет длину 3 м, высота $[CD]$, опущенная на сторону $[AB]$, имеет длину $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты $[CD]$ лежит на стороне $[AB]$, длина отрезка $[AD]$ равна длине стороны $[BC]$. Найдите длину стороны $[AC]$.

31. (МГУ, биофак, 1977 г.). Длина диагонали $[BD]$ трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны $[AD]$ равна n. Найдите длину основания $[CD]$, если известно, что длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины C, равны между собой.

32. (МГУ, биофак, 1977 г.). В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а величина угла при вершине M равна $\operatorname{arctg}(2/3)$. Найдите длину диагонали $[NQ]$, если известно, что длина стороны $[LQ]$ вдвое меньше длины стороны $[MN]$ и на 21 м больше длины стороны $[LN]$.

33. (МГУ, биофак, 1980 г.). Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$ м². Величина угла $\widehat{BAC}$ равна 120°. Величина угла $\widehat{ABC}$ больше величины угла $\widehat{ACB}$. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2 м. Найдите длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B.

34. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Дан квадрат $ABCD$ со стороной длины единица. Точка K принадлежит стороне $[CD]$ и $|CK|/|KD| = 1/2$. Найдите расстояние от вершины C до прямой (AK).

35. (МГУ, мехмат, 1980 г.). В трапеции углы при одном из оснований имеют величины $20°$ и $70°$, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

36. (МИФИ, 1976 г.). Одно из оснований трапеции служит диаметром окружности радиуса R, а другое отсекает от окружности дугу в α радиан $(0 < \alpha < \pi)$. Определите площадь трапеции.

37. (МИНХ, 1979 г.). Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна φ. Найдите отношение длины радиуса вписанной в данный треугольник окружности к длине радиуса описанной окружности.

38. (МИНХ, 1979 г.). В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны — 15 см. Определите радиусы вписанной и описанной окружностей.

39. (МАИ, 1977 г.). В круге радиуса 12 см длина хорды $[AB]$ равна 6 см, а хорды $[BC]$ — 4 см. Найдите длину хорды, соединяющей концы дуги $\breve{AC}$.

40. (МЭСИ, 1977 г.). На сторонах $[AB]$ и $[AC]$ угла $\widehat{BAC}$, равного $2\pi/3$, как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образованных полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $|AB| = 4$, $|AC| = 2$.

41. (МИФИ, 1978 г.). В треугольнике ABC заданы $|AC| = b$, $\widehat{ABC} = \alpha$. Определите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.

42. (ЛатвГУ, 1980 г.). В окружности радиуса r проведена хорда длины $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к этой окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.

43. (ЛатвГУ, 1980 г.). Через концы дуги окружности, содержащей $120°$, проведены касательные и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Вычислите длину этой окружности, если радиус исходной окружности равен R.

44. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная $[AB]$, где A и B — точки касания. Вычислите длины сторон треугольника ABC.

45. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

46. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке A. На окружности радиуса r взята точка B, диаметрально противоположная точке A, и в этой точке построена касательная l. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и прямой l.

47. (КГУ, ВМК, 1977 г.). Точки O_1 и O_2 — центры окружностей K_1 и K_2, касающихся внешне. Радиусы этих окружностей равны соответственно r_1 и r_2. На отрезке $[O_1O_2]$ как на диаметре построена окружность K_3. Вычислите радиус окружности, касающейся внешне окружностей K_1 и K_2 и внутренне — окружности K_3.

48. (МГУ, мехмат, 1980 г.). В треугольнике PQR величина угла QRP равна $\pi/3$. Найдите расстояние между точками касания со стороной $[QR]$ окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся прямых (PQ) и (PR).

49. (МЭСИ, 1979 г.). Дан треугольник ABC, длины сторон которого равны: $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 18$. Центр вписанной окружности O делит биссектрису угла C на две части $[CO]$ и $[OD]$. Во сколько раз длина $[CO]$ больше длины $[OD]$?

50. (МЭИ, 1976 г.). В угол величины α радиан вписана окружность радиуса R. Между вершиной угла и центром окружности проведена к этой окружности касательная, перпендикулярная биссектрисе данного угла. Определите площадь отсеченного треугольника.

51. (МИЭТ, 1977 г.). Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанного в треугольник круга равен r, а описанного — R.

52. (МИЭТ, 1977 г.). Окружность касается бо́льшего катета треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найдите ее радиус, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

53. (МИЭТ, 1977 г.; МТИМБО, 1977 г.). В треугольник с длинами сторон a, b, c вписан полукруг, диаметр которого лежит на стороне длины c. Найдите радиус этого полукруга.

54. (МИЭТ, 1977 г.). В равнобедренном треугольнике величина угла при основании равна $\pi/6$. Длина высоты, опущенной на основание, больше радиуса вписанного круга на 2. Найдите длину основания этого треугольника.

55. (МСИ, 1977 г.). Около круга радиуса r описана прямоугольная трапеция, меньшая из сторон которой равна $3r/2$. Вычислите площадь этой трапеции.

56. (МИСиС, 1978 г.). Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Найдите длину средней линии трапеции, если величина острого угла при ее основании равна α.

57. (МИЭТ, 1977 г.). В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию, а угловая мера дуги, стягиваемой этим основанием, равна α. Найдите площадь трапеции.

58. (КГУ, геофак, 1978 г.). В правильный треугольник с длиной стороны 10 см вписан круг. В этот круг вновь вписан правильный треугольник, в него — снова круг и т. д. Найдите сумму площадей всех кругов, образованных в результате последовательного вписывания.

59. (КуйбГУ, 1980 г.). Величины углов треугольника относятся как $2:3:7$. Длина наименьшей стороны равна a. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

60. (ОГУ, 1980 г.). В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Высота, проведенная к основанию, делится окружностью в отношении $1:2$. Найдите площадь треугольника.

61. (МГУ, психфак, 1980 г.). В прямоугольном треугольнике ABC угол $\hat{A}$ прямой, величина угла $\hat{B}$ равна 30°, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета $[AB]$.

62. (МГУ, психфак, 1980 г.). В квадрат $ABCD$ со стороной длины a вписана окружность, которая касается стороны $[CD]$ в точке E. Найдите длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой (AE).

63. (МГУ, эконом. фак., 1980 г.). В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении $2:3$. Найдите длины сторон треугольника.

64. (МГУ, эконом. фак., 1980 г.). В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов на отрезки длины 6 см и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

65. (МТИМБО, 1978 г.). На бóльшем катете как на диаметре описана полуокружность. Определите ее длину, если меньший катет равен 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы с полуокружностью, равна 24 см.

66. (МГУ, химфак, 1980 г.). В параллелограмме $ABCD$ диагональ $[AC]$ перпендикулярна стороне $[AB]$. Некоторая окружность касается стороны $[BC]$ параллелограмма $ABCD$ в точке P и касается прямой, проходящей через вершины A и B этого же параллелограмма, в точке A. Через точку P проведен перпендикуляр $[PQ]$ к стороне $[AB]$ (точка Q — основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла ABC, если известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $1/2$, а площадь пятиугольника $QPCDA$ равна S.

67. (КГУ, ВМК, 1978 г.). Вокруг трапеции с высотой длины H описана окружность. Основания трапеции видны из центра окружности под углами α и β. Найдите радиус окружности и площадь трапеции.

68. (ХГУ, мехмат, 1978 г.). Круг радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата, длина стороны которого равна 18 см. На какие два отрезка делит круг каждую из двух других сторон квадрата?

69. (МГУ, физфак, 1980 г.). В треугольнике ABC заданы: $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{BCA}=\beta$, $|AC|=b$. На стороне $[BC]$ взята точка D так, что $|BD|=3|DC|$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны $[AC]$ или ее продолжения за точку A. Найдите радиус этой окружности.

70. (МГУ, физфак, 1980 г.). На стороне угла с вершиной A взяты точки C и D (C между A и D) так, что $|AC|=2|CD|$. Через точки C и D проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке B. Между точками A и B взята точка E. Известно, что $\widehat{DAE}=\alpha$, $\widehat{DEA}=\beta$, $|AE|=k$. Найдите радиус окружности.

71. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите длины оснований трапеции.

72. (МГУ, мехмат, 1977 г.). Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите длину высоты трапеции.

73. (МГУ, мехмат, 1980 г.). Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC, касается стороны $[BC]$ в D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон $[AB]$ и $[AC]$, а также стороны $[BC]$ в точке E. Найдите $|ED|$, если величина угла $\widehat{BCA}$ равна $2\pi/3$.

74. (МТИМБО, 1980 г.). Треугольник задан координатами своих вершин $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 5)$, $C(4;\ 0;\ 3)$. Вычислите длину медианы $|BB_1|$ и величину угла $\hat{B}$.

75. (МИФИ, 1980 г.). Определите площадь равнобедренной трапеции, у которой длины оснований равны 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

76. (МТИМБО, 1978 г.). Вычислите площадь прямоугольной трапеции с основаниями длины 7 см и 3 см и острым углом в 60°.

77. (ТбГУ, физфак, 1981 г.). Дана трапеция $MNPQ$ с основаниями $[MQ]$ и $[NP]$. Прямая, параллельная основаниям, пересекает боковую сторону $[MN]$ в точке A, а сторону $[PQ]$ — в точке B. $S_{ANPQ}:S_{MABQ}=2:7$. Найдите $|AB|$, если $|NP|=4$, $|MQ|=6$.

78. (МТИМБО, 1979 г.). В равнобедренном треугольнике с боковой стороной длины 4 см проведена медиана к боковой стороне. Найдите длину основания треугольника, если длина медианы равна 3 см.

79. (ТбГУ, физфак, 1980 г.). Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

80. (МТИМБО, 1981 г.). В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

81. (ТбГУ, физфак, 1977 г.). В треугольнике ABC величины углов A, B, C составляют арифметическую прогрессию. Наименьшая сторона в 4 раза меньше наибольшей стороны. Найдите тангенс наименьшего угла.

82. (МТИМБО, 1981 г.). Длины сторон треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Наибольшая сторона треугольника превосходит наименьшую на 1,6 м. Определите периметр и площадь треугольника.

83. (ТбГУ, физфак, 1981 г.). В равнобедренном треугольнике синус угла при основании в 3 раза больше косинуса угла при вершине. Найдите синус угла при основании.

84. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). Найдите длины сторон прямоугольного треугольника, если $R=15$ см, $r=6$ см, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

85. (МТИМБО, 1978 г.). Даны две стороны b и c треугольника и его площадь $S=2bc/5$. Найдите третью сторону треугольника.

86. (СимфГУ, физфак, 1981 г.). Найдите угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

87. (ТбГУ, мехмат, 1981 г.). В треугольнике ABC из точки E стороны $[BC]$ проведена прямая, параллельная высоте $[BD]$, которая пересекает сторону $[AC]$ в точке F. Отрезок $[EF]$ делит треугольник ABC на две равные по площади фигуры. Найдите длину $|EF|$, если $|BD|=6$ см, $|AD|:|DC|=2:7$.

88. (МТИМБО, 1977 г.). В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что его диаметр лежит на гипотенузе и центр его делит гипотенузу на отрезки длиной в 15 см и 20 см. Найдите длину дуги полуокружности, заключенной между точками касания ее с катетами.

89. (ТбГУ, мехмат, 1980 г.). Дан треугольник, длины сторон которого 10 см, 12 см, 18 см. Проведена окружность, касающаяся двух меньших сторон, а центр находится на большей стороне. Найдите ее радиус.

90. (МТИМБО, 1981 г.). Из одной точки проведены к окружности две касательные длиной в 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определите радиус окружности.

91. (ТбГУ, физфак, 1982 г.). Из точки A к окружности с центром в точке N проведены две касательные, которые касаются окружности в точках B и M. Хорда $[BM]$ пересекает отрезок $[NA]$ в точке K. Длина отрезка $|NK|$ в $1^3/_4$ раза меньше длины отрезка $|KA|$; $|AB|=4$ см. Найдите площадь треугольника BAK.

92. (МТИМБО, 1981 г.). Около круга описана равнобедренная трапеция, у которой средняя линия имеет длину 5 см. Определите периметр и длину боковой стороны трапеции.

93. (ТбГУ, мехмат, 1982 г.). В трапеции $MPQF$ длины оснований $|MF|$ и $|PQ|$ равны 24 см и 4 см соответственно. Высота трапеции имеет длину 5 см. Точка N делит боковую сторону на отрезки $[MN]$ и $[NP]$. Длина отрезка $|MN|$ в 3 раза больше длины отрезка $|NP|$. Найдите площадь треугольника NQF.

94. (МТИМБО, 1981 г.). В ромб, который своей диагональю делится на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом длины 2 см. Найдите сторону ромба.

95. (ТбГУ, мехмат, 1977 г.). В прямоугольном треугольнике ABC на высоте $[CK]$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает катеты $[CA]$ и $[CB]$ соответственно в точках M и N; $|CM|=12$ см, $|CN|=18$ см. Найдите $|CA|$ и $|CB|$.

96. (МТИМБО, 1978 г.). Около круга радиуса R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определите стороны треугольника.

97. (ТбГУ, мехмат, 1978 г.). В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание $[AD]$ имеет длину 12 см, $|AB|=6$ см. Найдите расстояние от точки O пересечения диагоналей до точки K пересечения продолжений боковых сторон.

98. (МТИМБО, 1977 г.). Найдите диагональ и боковые стороны равнобедренной трапеции с основаниями длиной в 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

99. (ЛГУ, биол.-почв. фак., 1980 г.). Окружность радиуса r касается изнутри двух окружностей радиусов R_1 и R_2, причем центры всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех данных.

100. (ЛГУ, геофак, 1980 г.). На катете $[AC]$ равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что полуокружность, построенная на отрезке $[PC]$ как на диаметре, касается гипотенузы $[AB]$. В каком отношении полуокружность делит отрезок $[PB]$?

101. (МЭИ, 1979 г.). При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом в 45° и параметром 4 см имеет наибольшую площадь?

102. (МИСиС, 1978 г.). Сумма длин двух сторон треугольника равна a, а величина угла, заключенного между ними, равна 30°. Каковы должны быть длины сторон треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

103. (МИХМ, 1977 г.). Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8 см. Найдите минимум суммы квадратов длин всех сторон параллелограмма.

104. (МЭСИ, 1977 г.; МТИМБО, 1980 г.). В равнобедренный треугольник с длиной основания 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Какова должна быть длина высоты прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

105. (МИХМ, 1977 г.). В равнобедренный треугольник с углом в 120° при вершине и длиной основания 8 см вписан прямоугольник наибольшей площади, две вершины которого лежат на основании. Найдите площадь этого прямоугольника.

106. (МИХМ, 1979 г.). В треугольник, длина основания которого равна a, а высота — h, вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найдите длины сторон этого прямоугольника.

107. (МИТХТ, 1979 г.). Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

108. (МИЭТ, 1978 г.; МИУ, 1978 г.). Боковая сторона равнобочной трапеции конгруэнтна ее меньшему основанию, длина которого равна a. Какова должна быть длина большего основания трапеции, чтобы ее площадь была наибольшей?

109. (МИЭТ, 1980 г., КуйбГУ, 1980). На окружности радиуса R дана точка A. На каком расстоянии от точки A нужно провести хорду $[BC]$, параллельную касательной к окружности в точке A, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

110. (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b?

111. (МТИМБО, 1980 г.). Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найдите прямоугольник наибольшей площади.

112. (МТИМБО, 1980 г.). Из всех прямоугольников с площадью 9 дм^2 найдите тот, у которого периметр наименьший.

113. (МТИМБО, 1979 г.). В прямоугольный треугольник с гипотенузой в 24 см и углом в 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

114. (МТИМБО, 1979 г.). Найдите длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12 см.

115. (МТИМБО, 1979 г.). Найдите длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см и 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

116. (МТИМБО, 1982 г.). В равнобедренный треугольник со сторонами длиной 15 см, 15 см и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найдите длины сторон параллелограмма.

117. (МТИМБО, 1979 г.). В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

118. (МТИМБО, 1978 г.). Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Каковы должны быть катеты этого треугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

§ 5. СТЕРЕОМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости?

2. Докажите, что если три прямые в пространстве обладают тем свойством, что любые две из них пересекаются, то либо они проходят через общую точку, либо все лежат в одной плоскости.

3. В пространстве даны точки A, B, C и D, причем $[AB] \perp [CD]$, $[AC] \perp [BD]$. Докажите, что $[AD] \perp [BC]$.

4. В пространстве рассматриваются два отрезка $[AB]$ и $[CD]$, не лежащие в одной плоскости. Пусть $[MN]$ — отрезок, соединяющий их середины. Докажите, что $|AC|+|BD| > 2|MN|$.

5. Наклонная образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости. Докажите, что наклонная перпендикулярна плоскости.

6. На двух параллельных плоскостях расположены отрезки $[AB]$ и $[CD]$. Концы этих отрезков являются вершинами некоторой треугольной пирамиды. Докажите, что объем этой пирамиды не будет меняться, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

7. Докажите, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

8. Докажите, что всякий выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

9. Всегда ли можно трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

10. Докажите, что если у выпуклого трехгранного угла все двугранные углы острые, то и все плоские углы также острые.

11. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

12. Докажите, что две треугольные пирамиды равны или симметричны, если их соответствующие ребра равны.

13. Докажите, что следующие четыре условия равносильны:

1) боковые ребра пирамиды равны;

2) боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды;

3) боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды;

4) около основания пирамиды можно описать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

14. Докажите, что следующие три условия равносильны:

1) высоты боковых граней пирамиды равны;

2) высота пирамиды образует одинаковые углы с боковыми гранями;

3) боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом (заметим, что при этом двугранные углы при основании пирамиды могут оказаться различными!).

15. Докажите, что двугранные углы при основании пирамиды равны тогда и только тогда, когда в основание пирамиды можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

16. Докажите, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то и все ребра этой пирамиды равны.

17. Докажите, что если в треугольной пирамиде сумма длин противоположных ребер одна и та же для любой пары таких ребер, то вершины этой пирамиды являются центрами четырех шаров, попарно касающихся друг друга.

18. Докажите, что в треугольной пирамиде высота проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, в том и только в том случае, если противоположные ребра пирамиды перпендикулярны.

19. Все ребра одной пирамиды соответственно меньше ребер другой. Можно ли утверждать, что объем первой из них также меньше объема второй?

20. Дана правильная треугольная пирамида. Из произвольной точки P ее основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Докажите, что сумма длин отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней не зависит от выбора точки P на основании.

21. Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью?

22. Докажите, что если все диагонали параллелепипеда равны по длине, то он прямоугольный.

23. Докажите, что если все грани параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они являются ромбами.

24. Существует ли многогранник, все грани которого являются параллелограммами и попарно параллельны, но который, однако, не является призмой?

25. Докажите, что объем правильной усеченной пирамиды равен $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, где H — ее высота, а S_1 и S_2 — площади оснований.

26. Докажите, что все касательные к шару, проведенные из одной точки, имеют одинаковую длину.

27. Докажите, что треугольную призму можно вписать в шар в том и только в том случае, если эта призма прямая.

28. Докажите, что во всякую треугольную пирамиду можно вписать шар и вокруг этой пирамиды можно описать шар. При этом 1) все биссекторные плоскости двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке и эта точка и является центром вписанного шара; 2) все плоскости, проведенные через середины ребер данной пирамиды перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в одной точке, и эта точка и является центром описанного шара.

29. Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то вписанный в тетраэдр и описанный вокруг него шары концентричны.

30. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида; S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади четырех ее граней, r — радиус вписанного в пирамиду

шара. Докажите, что объем V этой пирамиды можно вычислить по формуле $V=\frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4)$.

31. Шар называется вневписанным в треугольную пирамиду, если он касается одной из граней пирамиды и плоскостей всех других ее граней. Докажите, что у всякой треугольной пирамиды имеется четыре вневписанных шара.

32*. Пусть r — радиус вписанного, R_1, R_2, R_3 и R_4 — радиусы вневписанных в треугольную пирамиду шаров. Докажите, что

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}.$$

33. Докажите, что для того чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы вокруг основания этой пирамиды можно было описать окружность.

34. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой (OS).

35. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ квадрат площади сечения $A'BD$ в 8 раз меньше суммы квадратов площадей граней.

36. Докажите, что если все ребра тетраэдра касаются одного шара, то суммы длин всех пар противоположных ребер одинаковы.

37. Какую наибольшую боковую поверхность может иметь прямоугольный параллелепипед, длина диагонали которого равна a? Докажите, что наибольшую боковую поверхность будет иметь куб.

38. В пирамиде все двугранные углы при основании равны по величине α. Докажите, что площадь боковой поверхности и площадь основания этой пирамиды связаны соотношением $S_{осн}=S_{бок}\cos\alpha$.

39. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения взята точка A. Докажите, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β. Чему равен этот угол?

40. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\widehat{BSC}=90°$, $\widehat{ASC}=\widehat{ASB}=60°$. Вершины A, S и середины ребер $[SB]$, $[SC]$, $[AB]$ и $[AC]$ лежат на поверхности шара. Докажите, что ребро $[SA]$ является диаметром этого шара.

41. Сфера касается трех сторон основания треугольной пирамиды в их серединах и пересекает боковые ребра в их серединах. Докажите, что пирамида правильная.

42. Сфера касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Плоские углы при вершине этой пирамиды равны. Докажите, что пирамида правильная.

43. Докажите, что если в призму (не обязательно прямую) вписан шар, то 1) высота призмы равна диаметру шара; 2) точки касания шара с боковыми гранями лежат на сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно боковым ребрам.

44. Докажите, что если в призму можно вписать прямой круговой цилиндр, то эта призма прямая, длина ее бокового ребра равна длине образующей цилиндра и в основание призмы можно вписать круг.

45. Если призма вписана в прямой круговой цилиндр, то она прямая, ее высота равна образующей цилиндра и основание призмы является вписанным многоугольником. Докажите.

46. Шар вписан в усеченный конус. Докажите, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.

47. Вокруг сферы описана четырехугольная усеченная пирамида. Докажите, что объемы пирамиды и шара относятся как их полные поверхности.

§ 6. СТЕРЕОМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Приведем формулы, которые могут потребоваться при вычислении площадей поверхностей и объемов пространственных фигур.

$$S_1 = S\cos\alpha, \tag{1}$$

где S — площадь данной плоской фигуры, а S_1 — площадь ее ортогональной проекции на другую плоскость, α — угол между плоскостями.

$$S = P\cdot l, \tag{2}$$

где S — площадь боковой поверхности призмы, P — длина периметра ортогонального сечения, l — длина образующей призмы.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2}, \tag{3}$$

где S и S_1 — площади параллельных сечений пирамиды, a и a_1 — длины сходственных элементов сечения, h и h_1 — расстояния сечений от вершины пирамиды или расстояния каких-либо сходственных элементов сечений от вершины пирамиды.

$$S = \frac{Ph}{2}, \tag{4}$$

где S — площадь боковой поверхности правильной пирамиды, P — длина периметра основания, h — апофема боковой грани.

$$S = 2\pi Rh, \quad S_1 = 2\pi R(R+h), \tag{5}$$

где S — площадь боковой поверхности прямого цилиндра, S_1 — площадь полной поверхности цилиндра, R — длина радиуса окружности основания, h — длина высоты цилиндра.

$$S = \pi Rl, \quad S_1 = \pi R(R+l), \tag{6}$$

где S — площадь боковой поверхности прямого конуса, S_1 — площадь полной поверхности конуса, R — длина радиуса окружности основания конуса, l — длина образующей конуса.

$$S=\pi(R+r)\,l, \qquad (7)$$

где S — площадь боковой поверхности прямого усеченного конуса, R и r — длины радиусов оснований усеченного конуса, l — длина образующей.

$$S=2\pi ra=2\pi Rh \quad \text{(рис. 1)}, \qquad (8)$$

где S — площадь поверхности вращения отрезка $[AB]$ длины a (рис. 1) около оси (ab), не пересекающей отрезка, r — расстояние середины отрезка от оси вращения, h — длина проекции $[ab]$ отрезка $[AB]$ на ось вращения, R — длина радиуса окружности с центром на оси вращения и касающейся отрезка $[AB]$ в его середине, a — длина отрезка $[AB]$.

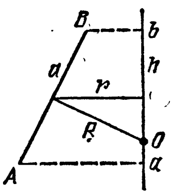


Рис. 1.

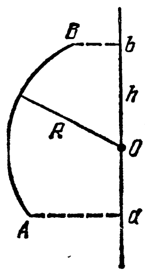


Рис. 2.

$$S=2\pi Rh \quad \text{(рис. 2)}, \qquad (9)$$

где S — площадь поверхности вращения дуги $\smile{AB}$ окружности радиуса длины R вокруг оси (ab), на которой лежит центр окружности (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения), h — длина проекции дуги $\smile{AB}$ на ось вращения.

$$S=4\pi R^2, \qquad (10)$$

где S — площадь поверхности шара (площадь сферы), R — длина радиуса шара.

$$V=abc, \qquad (11)$$

где V — объем прямоугольного параллелепипеда, a, b, c, — длины его сторон.

$$V=S\cdot h, \qquad (12)$$

где V — объем призмы, S — площадь многоугольника, лежащего в основании призмы, h — длина высоты призмы.

$$V=Sl, \qquad (13)$$

где V — объем наклонной призмы, S — площадь перпендикулярного сечения к образующей призмы, l — длина бокового ребра призмы.

$$V=\frac{1}{3}Sh, \qquad (14)$$

где V — объем пирамиды, S — площадь многоугольника, лежащего в основании пирамиды, h — длина высоты пирамиды.

$$V=\frac{1}{3}(S+s+\sqrt{Ss})\,h, \qquad (15)$$

где V — объем усеченной пирамиды, S и s — площади ее оснований, h — длина высоты усеченной пирамиды.

$$V = \pi R^2 h, \tag{16}$$

где V — объем кругового цилиндра, R — длина радиуса круга, лежащего в основании цилиндра, h — длина высоты цилиндра.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h, \tag{17}$$

где V — объем кругового конуса, R — длина радиуса круга, лежащего в основании конуса, h — длина высоты конуса.

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) h, \tag{18}$$

где V — объем кругового усеченного конуса, R и r — длины радиусов кругов, лежащих в основании конуса, h — длина высоты конуса.

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h \qquad \text{(рис. 3)}, \tag{19}$$

где V — объем шарового сектора с центром на оси вращения (ab), R — длина радиуса шарового сектора, h — длина высоты шарового

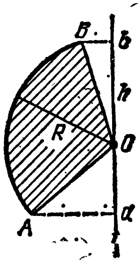


Рис. 3.

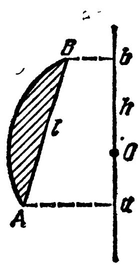


Рис. 4.

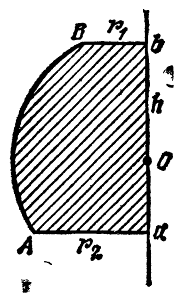


Рис. 5.

пояса, служащего основанием шарового сектора (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения (ab)). На рис. 3 изображено лишь сечение сектора осевой полуплоскостью.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \tag{20}$$

где V — объем шара, R — длина радиуса шара.

$$V = \frac{1}{6} \pi l^2 h \qquad \text{(рис. 4)}, \tag{21}$$

где V — объем кольца с центром на оси вращения (ab), l — длина хорды $[AB]$ кольца, h — длина проекции $[ab]$ хорды $[AB]$ на ось вращения (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения (ab)). На рис. 4 изображено лишь сечение кольца осевой полуплоскостью.

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)h \qquad \text{(рис. 5)}, \tag{22}$$

где V — объем шарового слоя с центром на оси вращения (ab), r_1 и r_2 — расстояния точек A и B от оси вращения (ab) (r_1 и r_2 — длины радиусов кругов, ограничивающих слой), h — длина высоты шарового пояса, служащего основанием шаровому слою (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения). На рис. 5 изображено лишь сечение шарового слоя осевой полуплоскостью.

$$V=\frac{1}{6}h(S+4S_1+s), \tag{23}$$

где V — 1) объем любого многогранника, у которого основания — различные неправильные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а боковая поверхность образована треугольниками или трапециями, вершины которых совпадают с вершинами многоугольников, лежащих в основании; 2) объем цилиндра, 3) объем конуса, 4) объем шарового слоя; S и s — площади фигур, расположенных в параллельных плоскостях (оснований), S_1 — площадь сечения тела плоскостью, параллельной основаниям и находящейся от них на равных расстояниях; h — длина высоты (расстояние между основаниями).

1. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми L_1 и L_2, если расстояние между точками $A\in L_1$ и $B\in L_2$, равноотстоящими от оснований $C\in L_1$ и $D\in L_2$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2l$, а $|DC|=|AC|=|BD|=l$.

2. (ХГУ, физфак, 1978 г.). Даны две скрещивающиеся под углом α прямые L_1 и L_2. Расстояние между точками $A\in L_1$ и $B\in L_2$, равноотстоящими от оснований $C\in L_1$ и $D\in L_2$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно m. Найдите расстояние между прямыми, если $|AC|=|BD|=l$.

3. (МЭСИ, 1979 г.). Длина высоты прямоугольного треугольника ABC, опущенной на гипотенузу $[AB]$, равна 9,6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр $[CM]$, $|CM|=28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы $[AB]$.

4. (МИФИ, 1980 г.). Точки A, B, C, принадлежащие окружности, делят длину окружности в отношении $1:2:2$ ($\breve{AC}=\breve{BC}$). Найдите расстояние от центра окружности O до плоскости γ, если известно, что плоскость γ отстоит от точек A и B на расстояние d, а от точки C — на расстояние b.

5*. (МИФИ, 1980 г.). Даны ромб $ABCD$ и плоскость β. Найдите расстояние от вершины D до плоскости β, проходящей через вершину A, если расстояния от точек B и C до плоскости β равны, соответственно, b и c.

6. (МВТУ, 1978 г.). Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

7. (ХАИ, 1980 г.). Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Определите боковую поверхность полученной пирамиды, если длина ребра куба равна a.

8. (ЛатвГУ, 1980 г.). Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

9. (КГУ, химфак, 1978 г.). Плоскость пересекает прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием по ромбу с острым углом α. Под каким углом пересекает эта плоскость боковые ребра параллелепипеда?

10. (МЭИ, 1978 г.). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания $[AC]$ и $[BD]$ пересекаются в точке M, $\widehat{AMB}=\alpha$. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $|B_1M|=b$, $\widehat{BMB_1}=\beta$.

11. (МВТУ, 1979 г.). Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

12. (МИНХ, 1979 г.). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ — квадрат со стороной 5 см; длина ребра $[AA_1]$ также равна 5 см, и это ребро образует с ребрами $[AB]$ и $[AD]$ углы, равные 60°. Найдите длину диагонали $[BD_1]$.

13. (МЭИ, 1979 г.). Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

14. (БГУ, 1980 г.). Найдите площадь боковой поверхности и объем прямого параллелепипеда, зная, что его высота равна h, диагонали его составляют с основанием углы α и β, а его основанием служит ромб.

15. (МАИ, 1979 г.). Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

16. (МЭИ, 1978 г.). Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Определите объем призмы, если ее большая диагональ имеет длину l и образует с плоскостью основания угол β.

17. (МГРИ, 1979 г.). Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом α. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна S. Найдите объем отсеченной пирамиды.

18. (МИНХ, 1979 г.). В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну

из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Площадь этого сечения равна Q. Найдите объем призмы.

19. (МЭИ, 1980 г.). Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Боковая сторона трапеции и ее меньшее основание имеют равные длины. Найдите объем призмы, если диагональ призмы равна a и образует с плоскостью основания угол β.

20. (КуйбГУ, 1980 г.). В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найдите объем призмы.

21. (МАТИ, 1980 г.). Определите объем прямой призмы, у которой основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом α, если боковое ребро призмы имеет длину l и составляет с диагональю бо́льшей боковой грани угол β.

22. (КуйбГУ, 1980 г.). Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длины c и острым углом в 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определите объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

23. (КГУ, географ. фак., 1977 г.). Прямая призма имеет в основании равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из его сторон под углом α к плоскости основания, отсекает от призмы треугольную пирамиду объема V. Определите площадь сечения.

24. (МИНХ, 1979 г.). Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы в 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

25. (КГУ, ВМК, 1978 г.). Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

26. (МГИ, 1980 г.). Длина диагонали правильной четырехугольной призмы равна l, диагональ образует с плоскостью основания угол, величина которого равна α. Найдите объем призмы.

27. (КПИ, 1979 г.). В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая это основание под углом α и три боковых ребра призмы. Определите площадь полученного сечения и его острый угол, если сторона основания призмы равна b.

28. (МТИМБО, 1977 г.). Определите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания по длине равна a.

29. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1981 г.). Основание призмы — правильный треугольник, длина стороны которого 4 см. Одна из боковых граней, перпендикулярная плоскости основания, — ромб, длина диагонали которого равна 6 см. Найдите объем призмы.

30. (МТИМБО, 1979 г.). Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α; угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Определите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.

31. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, основание которого имеет длину a и угол при основании α. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

32. (МТИМБО, 1980 г.). Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определите объем призмы.

33. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1977 г.). Основание призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом длины a см. Боковое ребро, противоположное гипотенузе, с катетами составляет острые углы α и β. Длина бокового ребра b см. Найдите объем призмы.

34. (МТИМБО, 1978 г.). Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна S. Зная, что угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α, найдите сторону основания.

35. (МТИМБО, 1977 г.). В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине α. Определите объем пирамиды.

36. (МТИМБО, 1978 г.). Найдите угол между апофемой боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, зная, что разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

37. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1978 г.). Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см, двугранный угол при основании равен 30°. Найдите объем пирамиды.

38. (МТИМБО, 1982 г.). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет длину l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

39. (МТИМБО, 1978 г.). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

40. (МТИМБО, 1979 г.). Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно одной из боковых граней пирамиды. Найдите площадь сечения, если боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом α, а сторона основания пирамиды равна a.

41. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1980 г.). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом длины a

и противолежащим углом α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой грани, проходящей через меньший катет основания, если $\operatorname{tg}\alpha=3/2$, $\operatorname{tg}\beta=2/3$, $a=8$ см.

42. (МТИМБО, 1979 г.). Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC, у которого катет $|AC|=b$ и $\hat{B}=\beta$. Боковые грани пирамиды, проходящие через катеты $[AC]$ и $[BC]$, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань образует с основанием угол α. Найдите объем пирамиды.

43. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1982 г.). Дана пирамида $SACB$ с вершиной в S, ее основание — прямоугольный треугольник ACB. В этом треугольнике $[AB]$ — гипотенуза, ее длина $2\sqrt{3}$ см. Боковое ребро $[SA]$ перпендикулярно к плоскости основания. Двугранный угол, составленный боковыми гранями SAC и SAB, равен 30°. Длина высоты пирамиды — 4 см. Найдите площадь боковой поверхности.

44. (МТИМБО, 1978 г.). Найдите объем пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длины c и острым углом α, если боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β.

45. (ТбГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 5 см. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

46. (МТИМБО, 1982 г.). В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

47. (МТИМБО, 1979 г.). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противоположная ему сторона имеет длину a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найдите полную поверхность пирамиды.

48. (МТИМБО, 1982 г.). Определите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого равны α и β, а радиус описанного около основания круга имеет длину R. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ.

49. (БашГУ, 1980 г.). В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α. Найдите объем пирамиды.

50. (МЭИ, 1980 г.). Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и апофемой равен α, длина бокового ребра пирамиды равна l. Найдите объем пирамиды.

51. (ВЗЭИС, 1978 г.). Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α, радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r. Найдите боковую поверхность пирамиды.

52. (ТартГУ, 1980 г.). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 45°. Определите объем пирамиды.

53. (КГУ, геофак, 1978 г.). Найдите высоту правильного тетраэдра, объем которого равен V.

54. (КГУ, геофак, 1978 г.). Найдите объем правильного тетраэдра, высота которого равна H.

55. (КГУ, химфак, 1978 г.). В правильной треугольной пирамиде, объем которой равен V, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Определите полную поверхность пирамиды.

56. (МИТХТ, 1979 г.). Найдите объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, зная, что плоскость, проходящая через сторону основания и середину высоты пирамиды, наклонена к основанию под углом φ, а сторона основания равна a.

57. (МАТИ, 1980 г.). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны на расстояние d.

58. (МИНХ, 1980 г.). Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Определите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна a, а высота пирамиды равна H.

59. (КПИ, 1979 г.). В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — $2a$, через середину бокового ребра, перпендикулярно к нему, проведена плоскость. Определите площадь образовавшегося сечения.

60. (МИТХТ, 1979 г.). Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру $[SA]$. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен 2/3. Определите косинус угла между боковыми гранями пирамиды.

61. (МТИМБО, 1977 г.; МИТХТ, 1979 г.). Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найдите площадь сечения и объем пирамиды, зная, что длина стороны основания равна a, а угол между сечением и основанием равен α.

62. (КишПИ 1980 г.). Высота правильной треугольной призмы равна H. Через одно из ребер нижнего основания и противоположную ему вершину верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если угол образовавшегося треугольника при заданной вершине призмы равен α.

63. (КГУ, физфак, 1977 г.). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R.

64. (КПИ, 1979 г.). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а плоский угол при вершине равен 2α. Найдите площадь поверхности шара, описанного вокруг пирамиды.

65. (МТИПП, 1978 г.; ОГУ, 1980 г.). Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны l. Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен α. Найдите объем пирамиды.

66. (ПГУ, 1980 г.). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

67. (МЭИ, 1977 г.). Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α, сумма длин высоты пирамиды и радиуса окружности, вписанной в основание пирамиды, равна a. Найдите объем пирамиды.

68. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и каждое из них равно b. Найдите объем пирамиды.

69. (МИНХ, 1979 г.). В тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми (AD) и (BC), если $|AB|=|AC|$ и $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}$.

70. (МИНХ, 1978 г.). Стороны треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны 13, 14 и 15 см. Двугранные углы при основании пирамиды равны по 45°. Найдите боковую поверхность пирамиды.

71. (КПИ, 1979 г.). В треугольной пирамиде боковые ребра равны, а в основании ее лежит прямоугольный треугольник, высота которого, опущенная из вершины прямого угла, равна h. Двугранные углы, образованные гранями пирамиды, пересекающимися по катетам основания, равны α и β. Найдите объем пирамиды.

72. (МИСиС, 1979 г.). В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом φ при вершине. Все боковые ребра пирамиды равны по длине a. Определите объем пирамиды, если длина радиуса вписанной в основание окружности равна r.

73. (МИСиС, 1979 г.). В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным по величине α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Определите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен R.

74. (МАТИ, 1979 г.). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол величины α. Боковые ребра пирамиды образуют с высотой пирамиды угол β. Определите объем пирамиды.

75. (МАИ, 1979 г.). В треугольной пирамиде $SABC$ две равные боковые грани ASB и BSC перпендикулярны плоскости основания, а грань ASC наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен r и $\widehat{ABC}=\alpha$.

76. (ВильнГУ, матфак, 1980 г.). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна m, а двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен 2α. Через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру. Найдите объем части пирамиды, лежащей ниже плоскости.

77. (ЛатвГУ, 1980 г.). Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, каждое из боковых ребер равно l. Найдите плоские углы при вершине пирамиды, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\pi/4$.

78. (КазанГУ, физфак, 1978 г.). Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники. Основание и противолежащий ему угол каждого такого треугольника равны a и α соответственно. Найдите объем пирамиды.

79*. (КазанГУ, физфак, 1978 г.). В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а площади двух других равны P и Q соответственно. В каком отношении высота пирамиды делит сторону основания?

80*. (КазанГУ, физфак, 1978 г.). В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, опирающаяся на гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания. Площади двух других граней равны S и T соответственно. Найдите длину гипотенузы основания, если известно, что она делится высотой пирамиды в отношении $1 : p$.

81. (КПИ, 1979 г.). Найдите радиус вписанного в треугольную пирамиду шара, если все ее углы при вершине прямые, а длины боковых ребер равны a, b и c.

82*. (КПИ, 1979 г.). Найдите объем треугольной пирамиды, если площади ее граней равны S_0, S_1, S_2 и S_3, а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью S_0, равны между собой.

83*. (НГУ, мехмат, 1980 г.). $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром длины единица, O — центр шара радиуса $\sqrt{2}$, касающегося ребер (AS), (AC) и (AB) (или их продолжений). Найдите длину отрезка $[OK]$, где K — середина ребра $[SC]$.

84*. (НГУ, мехмат, 1980 г.). В тетраэдре $ABCD$ ребра $[AC]$, $[BC]$ и $[DC]$ взаимно перпендикулярны. Точка M лежит в плоскости ABC и одинаково удалена от ребер $[AB]$, $[BC]$ и $[CD]$. Точка N лежит в плоскости BCD и одинаково удалена от тех же ребер. Найдите $|MN|$, если $|BC|=|CD|=\sqrt{3}$, $|AC|=3$.

85. (ВЗИИЖТ, 1979 г.). В правильной четырехугольной пирамиде длина высоты равна 3 см, а бокового ребра — 5 см. Найдите объем пирамиды.

86. (МГИ, 1980.). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна a, а величина двугранного угла при основании равна α.

87. (МИСиС, 1979 г.). Плоский угол боковой грани при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен по величине φ. Найдите величину угла между боковым ребром и плоскостью основания.

88. (МИТХТ, 1979 г.). В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

89. (КПИ, 1979 г.). Основанием пирамиды служит прямоугольник, две боковые грани ее перпендикулярны основанию, две другие боковые грани образуют с основанием углы α и β соответственно. Определите объем пирамиды, если длина наибольшего из боковых ребер равна l.

90. (КПИ, 1979 г.). Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

91. (МИТХТ, 1979 г.). Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен $60°$, длина бокового ребра равна a. Через середину одного из боковых ребер, перпендикулярно к нему, проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

92. (ПГУ, 1980 г.). Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и составляет с боковой гранью угол α. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите объем пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

93. (КПИ, 1979 г.). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

94. (НГУ, мехмат, 1980 г.). Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1. Точка M лежит в основании $ABCD$ пирамиды и одинаково удалена от ребер $[AS]$ и $[DS]$, а $|MS|=|MC|$. Точка N лежит на грани BSC и также одинаково удалена от тех же ребер, причем $|NS|=|NC|$. Найдите площадь треугольника BMN.

95. (МАИ, 1979 г.). Основанием пирамиды служит ромб, длины диагоналей которого равны 6 м и 8 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину 1 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96. (МИНХ, 1978 г.; МИТХТ, 1978 г.). Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с ним угол величиной β. Определите объем пирамиды и площадь боковой поверхности.

97. (МГРИ, 1979 г.). Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды угол β. Найдите объем пирамиды.

98. (МГРИ, 1977 г.; МТИМБО, 1979 г.). Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

99. (КГУ, физфак, 1977 г.). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если угол при основании боковой грани равен α, а радиус окружности, которая вписана в эту грань, равен R.

100. (КПИ, 1979 г.). Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ боковой грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите боковую поверхность пирамиды.

101. (МЭИ, 1980 г.). В правильной шестиугольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным ребром основания равен α, сумма радиусов окружностей, вписанной в основание и описанной около основания, равна m. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

102. (ХГУ, мехмат, 1978 г.). Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна m. Двугранный угол при основании равен α. Найдите полную поверхность пирамиды.

103. (МИНХ, 1979 г.). Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее равен 38 см^3, а площади оснований относятся как 9 : 4. Определите боковую поверхность усеченной пирамиды.

104. (КПИ, 1979 г.). Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2. Найдите площадь S сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна основаниям и равноудалена от них.

105. (МТИМБО, 1977 г.). Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найдите высоту пирамиды.

106. (РГУ, физфак, спец. радиофизика, 1977 г.). Разность между длиной апофемы и длиной высоты правильной четырехугольной пирамиды равна m, а угол между ними равен α. Найдите объем пирамиды.

107. (МТИМБО, 1978 г.). В правильной четырехугольной пирамиде длина высоты равна h. Через диагональ основания пирамиды и середину противолежащего ребра проведено сечение, образующее угол α с диагональной плоскостью, проведенной через ту же диагональ основания. Найдите площадь сечения.

108. (МТИМБО, 1982 г.). Найдите плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

109. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1978 г.; МТИМБО, 1977 г.). Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 12 см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а две другие составляют с основанием углы в $30°$ и $60°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

110. (МТИМБО, 1982 г.). Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной длины a и острым углом β. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом γ. Найдите полную поверхность пирамиды.

111. (МТИМБО, 1982 г.). Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого имеет длину d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Вычислите полную поверхность пирамиды.

112. (ТбГУ физфак, спец. радиофизика и электроника, 1980 г.). Основание пирамиды — параллелограмм с тупым углом α. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а остальные две составляют с плоскостью основания углы β и γ. Найдите площадь меньшей боковой грани, если меньшее боковое ребро имеет длину 8 см, $\sin\beta={}^1/_3$, $\sin\gamma={}^3/_5$, $\operatorname{tg}\alpha=-{}^1/_3$.

113. (МТИМБО, 1982 г.). Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найдите радиус описанного шара.

114. (МТИМБО, 1979 г.). Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите длину радиуса вписанного в пирамиду шара.

115. (МТИМБО, 1979 г.). Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой высота по длине равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

116. (МТИМБО, 1978 г.). В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом α. Определите объем конуса, если сторона основания пирамиды имеет длину a.

117. (МТИМБО, 1979 г.). В конус, образующая которого по длине равна l и наклонена к основанию под углом α, вписана пирамида, в основании которой прямоугольник с острым углом 2α между диагоналями. Найдите расстояние от основания высоты до боковой грани, проходящей через меньшую сторону основания.

118. (СимфГУ, матфак, 1982 г.). В усеченный конус вписан шар радиуса длины a. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

119. (МТИМБО, 1978 г.). Объем конуса равен v. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найдите объем пирамиды.

120. (РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти величину угла между осью конуса и его образующей, зная, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 3 : 2.

121. (МТИМБО, 1982 г.). Найдите объем и полную поверхность конуса, если в его основании хорда длины a стягивает дугу α, а угол между высотой и образующей конуса равен β.

122. (СимфПИ, 1981 г.). Определите площадь полной поверхности цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат и боковая поверхность равна S.

123. (МТИМБО, 1982 г.). Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание конуса по хорде длины a, стягивающей дугу β. Найдите объем и боковую поверхность конуса.

124. (МТИМБО, 1979 г.). Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая в основании дугу в 120°. Определите

площадь сечения, если радиус основания конуса по длине равен R и плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол α.

125. (ТбГУ, физфак, спец. радиофизика и электроника, 1981 г.). Треугольник ABC вращается вокруг стороны $[BC]$, $\hat{A}=120°$. Найдите площадь той поверхности, которая получается вращением ломаной, составленной из сторон $[CA]$ и $[AB]$ если $|AB|=2\sqrt{3}$, $|BC|=5$.

126. (МТИМБО, 1977 г.). В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S. Угол между его высотой и образующей равен α. Найдите объем шара.

127. (РГУ, мехмат, спец. прикладная матем., 1977 г.). Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, если известно, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади полной поверхности конуса как $7:4$.

128. (МТИМБО, 1979 г.). Образующая конуса наклонена к плоскости основания конуса под углом φ. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через центр вписанного в конус шара параллельно основанию, равна Q. Найдите объем конуса.

129. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). В прямой конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник, вписан цилиндр (нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса). Отношение площади боковой поверхности конуса к площади боковой поверхности цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найдите величину угла между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

130. (МТИМБО, 1977 г.). Определите боковую поверхность конуса, зная длину радиуса R описанного вокруг него шара и угол α, под которым из центра шара видна образующая конуса.

131. (РГУ, физфак, спец. физика, 1977 г.). В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Площадь полной поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

132. (МТИМБО, 1982 г.). Около шара радиуса R описан прямой круговой конус, в котором угол между образующей и плоскостью основания равен α. Определите полную поверхность и объем конуса.

133. (МТИМБО, 1982 г.). В шар радиуса R вписан конус, в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найдите полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α.

134. (МТИМБО, 1978 г.). В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса по длине равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол, равный α. Найдите объем конуса.

135. (МИНХ, 1979 г.). Радиус основания цилиндра равен 26 см, длина образующей 48 см. На каком расстоянии от оси цилиндра следует провести сечение, параллельное оси цилиндра, чтобы оно имело форму квадрата?

136. (ХАИ, 1980 г.). В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена плоскость, которая отсекает от окружности основания дугу в α радиан. Площадь сечения равна S. Определите объем цилиндра.

137. (БГУ, 1980 г.). Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m : n$. Площадь сечения равна S. Найдите боковую поверхность цилиндра.

138. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Высота конуса, равная h, является диаметром сферы, которая делит боковую поверхность конуса в отношении $m : n$ (считая от вершины). Найдите радиус основания конуса.

139*. (МГУ, физфак, 1980 г.). Два равных конуса с общей вершиной A расположены по разные стороны от плоскости P так, что только одна образующая каждого конуса ($[AB]$ для одного конуса и $[AC]$ для другого) принадлежит плоскости P. Известно, что $\widehat{BAC}=\beta$, а угол между высотой и образующей каждого конуса равен φ. Найдите угол между линией пересечения плоскостей оснований конусов и плоскостью P.

140*. (МГУ, физфак, 1980 г.). Точка O — общая вершина двух конгруэнтных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса ($[OA]$ для одного конуса и $[OB]$ для другого) принадлежат плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, а величина угла между высотой и образующей каждого конуса равна φ, причем $2\varphi<\beta$. Найдите величину угла между образующей (OA) и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B.

141. (БГУ, 1980 г.). Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найдите объем усеченного конуса.

142. (МТИММП, 1980 г.). Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ см равновелик прямому конусу, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

143. (КПИ, 1979 г.). В шаре радиуса R из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определите их длину.

144*. (КПИ, 1979 г.). Четыре сферы радиуса r расположены так, что каждая из них касается трех других. Найдите радиус сферы, которая касается каждой из данных сфер.

145*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). На плоскости помещено четыре шара: два шара радиуса a и два одинаковых шара неизвестного радиуса x так, что каждый шар касается трех других и плоскости. Найдите радиус x.

146. (КПИ, 1979 г.). Сфера, центр которой находится в вершине конуса, касается его основания. Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса, если сфера делит конус на части равных объемов.

147. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Сфера с центром в вершине конуса делит конус на две равновеликие части. Найдите радиус этой сферы, если радиус основания конуса равен a, а величина угла при вершине его осевого сечения равна α.

148*. (КПИ, 1979 г.). В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α, вписан шар радиуса R. Найдите объем части конуса, расположенной над шаром.

149. (МСИ, 1980 г.). Расстояние от центра вписанного в конус шара до вершины конуса равно a. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен α. Найдите объем конуса.

150. (ВильнГУ, физфак, 1980 г.; МГРИ, 1979 г.). В конус вписан шар, площадь большого круга которого равна Q. Найдите полную поверхность конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 2α.

151*. (КГУ, ВМК, 1980 г.). Сфера вписана в прямой круговой конус с углом α при вершине осевого сечения. В эту сферу вписан конус с таким же углом при вершине осевого сечения. Найдите величину угла α, если отношение объема первого конуса к объему второго конуса равно 27.

152. (ЛПИ, 1980 г.). Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а ее радиус равен радиусу этого основания. Высота конуса больше радиуса основания конуса. Через окружность, по которой сфера пересекается с боковой поверхностью конуса, проведена плоскость. Каким должен быть угол при вершине осевого сечения конуса, чтобы эта плоскость делила конус на две одинаковые по объему части?

153. (ЯГУ, 1980 г.). Шар касается всех граней куба. Найдите отношение площадей поверхности и отношение объемов этих фигур.

154. (МАМИ, 1979 г.). Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна Q. Определите площадь полной поверхности конуса, если наибольший угол между его образующими равен α.

155. (МГМИ, 1979 г.). Найдите отношение площади полной поверхности прямого кругового конуса, вписанного в шар, к площади поверхности этого шара, если известно, что угол при вершине осевого сечения конуса равен α и $\alpha > \pi/2$.

156. (МГУ, филфак, 1977 г.). В прямой круговой конус с углом в $60°$ при вершине осевого сечения вложено три одинаковых шара радиуса r так, что каждый из них касается двух других, основания и боковой поверхности конуса. Найдите радиус основания конуса.

157. (КПИ, 1979 г.). В конус вписан шар радиуса r. Найдите объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

158. (МГМИ, 1979 г.). Найдите отношение объема шара к объему прямого кругового цилиндра, вписанного в этот шар, если известно, что меньший угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен α и диаметр основания больше высоты цилиндра.

159. (МЭИ, 1980 г.). В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса S.

160. (КПИ, 1979 г.). В конус, радиус основания которого равен r, а угол, составленный высотой и образующей, равен α, вписан цилиндр так, что его боковая поверхность относится к боковой поверхности конуса как $m : n$. Найдите объем цилиндра.

161. (МИХМ, 1979 г.). В конус вписан полушар так, что большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найдите площадь полной поверхности полушара и его объем, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

162. (МИСиС, 1978 г.). В конус, у которого площадь боковой поверхности равна S, а угол наклона образующей к плоскости основания равен φ, вписана треугольная пирамида, имеющая основанием прямоугольный треугольник с острым углом α. Определите объем пирамиды.

163. (МГРИ, 1980 г.). Угол между плоскостью основания и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

164*. (КГУ, геофак, 1978 г.). В треугольную пирамиду, все ребра которой имеют длину a, вписан шар. В один из трехгранных углов пирамиды вновь вписан шар так, что он касается первого. Найдите объем второго шара.

165. (КГУ, эконом. фак., 1980 г.). Высота правильной четырехугольной пирамиды и радиус описанной сферы равны соответственно h и r $(r \leqslant h)$. Найдите площадь основания пирамиды.

166. (МТИМБО, 1979 г.; БашГУ, 1980 г.). В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания равен α. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

167. (КГУ, ВМК, 1980 г.). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плоскость, параллельная основанию пирамиды. Определите площадь боковой поверхности полученной усеченной пирамиды.

168. (ЛьвГУ, 1980 г.). В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Найдите объем пирамиды.

169. (МГУ, географ. фак., 1980 г.). В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Длина высоты пирамиды равна H, а радиус основания описанного конуса равен R. Найдите разность объемов описанного и вписанного конуса.

170. (МАИ, 1979 г.). Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ. Около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом 2φ. Определите объем пирамиды.

171. (МЭИ, 1979 г.). Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l и боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

172. (МГРИ, 1979 г.). В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр с радиусом основания r. Высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды. Плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды.

173. (БГУ, 1980 г.). В цилиндр вписан параллелепипед, диагональ которого образует с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью — угол β. Найдите объем цилиндра, если сторона основания большей боковой грани параллелепипеда равна a.

174. (МСИ, 1980 г.). Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d. Плоскость, проходящая через эту диагональ и вершину второго основания призмы, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

175*. (ЛГУ, геофак, 1980 г.). В основании правильной призмы лежит треугольник, вершины которого являются серединами ребер основания правильной пирамиды. Какая часть объема призмы находится вне пирамиды, если известно, что высота пирамиды в 3 раза меньше высоты призмы?

176*. (НГУ, мехмат, 1980 г.). $SABC$ — правильный единичный тетраэдр. Сфера касается ребер $[AS]$, $[AC]$, $[AB]$ и проходит через середину ребра $[BC]$. Найдите радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра.

177*. (НГУ, физфак, 1980 г.). Сфера касается бокового ребра $[AA']$ и непараллельных ребер оснований $[AB]$ и $[A'D']$ единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ и проходит через точку M ребра $[CC']$, причем $|CM|={}^1/_3$. Найдите радиус сферы.

178*. (КГУ, мехмат, 1978 г.). Внутри цилиндра высотой $3a$ помещено три одинаковых шара радиуса a так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания, а третий — верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.

179. (МТИМБО, 1982 г.). Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол φ. При каком значении φ объем конуса будет наименьшим? Чему равен этот объем?

180. (МТИМБО, 1980 г.). В полушар радиуса R вписан конус так, что вершина его находится в центре полушара. Найдите радиус основания конуса, при котором объем его будет максимальным.

181. (РГУ, мехмат, спец. матем., механ., 1977 г.). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который противолежит данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β. Найдите объем пирамиды. При каком значении α объем будет наибольшим?

182. (МТИМБО, 1980 г.). Найдите отношение высоты к радиусу основания цилиндра, который при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность.

183. (МТИМБО, 1979 г.). В полушар радиуса R вписан цилиндр так, что плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема.

184. (МТИМБО, 1981 г.). Бак цилиндрической формы должен вмещать v литров воды. Какими должны быть его размеры, чтобы поверхность без крышки была наименьшей?

185. (РГУ, мехмат, вечерн. отд., 1977 г.). Конус объема v описан около шара. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Найдите объем шара. При каком значении α объем будет наибольшим?

186. (МТИМБО, 1980 г.). Около цилиндра (радиус основания которого равен r, а высота — h) опишите конус наименьшего объема, если плоскость основания цилиндра и основания конуса совпадают. Определите объем этого конуса.

187. (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Через ребро $[AB]$ правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, $|AB|=a$.

188. (КГУ, мехмат, 1980 г.). Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, у которого $\widehat{ABC}=90^\circ$, $\widehat{BAC}=\varphi$, $|AC|=b$. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а угол между гранью SBC и плоскостью основания равен α. Определите объем пирамиды. При каком значении φ объем пирамиды наибольший?

189. (МИФИ, 1980 г.). В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиуса r. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая этот шар. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значений.

190. (МИФИ, 1980 г.). В правильную четырехугольную пирамиду, длина высоты которой равна H, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен β, вписан конус. Через апофему боковой грани пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значение.

191. (МГМИ, 1979 г.). Найдите отношение площади поверхности, полученной при вращении ромба вокруг большей диагонали, к площади поверхности, полученной при вращении этого ромба вокруг меньшей диагонали, если известно, что меньший угол между сторонами ромба равен α.

192. (МГМИ, 1979 г.). Найдите отношение объема тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг большей стороны, к объему тела, полученного при вращении этого прямоугольника вокруг меньшей стороны, если известно, что в этом прямоугольнике меньший угол между диагоналями равен α.

193. (БашГУ, 1980 г.). Прямоугольный треугольник с катетом длины a и прилежащим к этому катету острым углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной к биссектрисе этого угла. Найдите объем тела вращения.

194. (МЭИ, 1979 г.). Длина меньшей стороны параллелограмма равна a, острый угол параллелограмма равен α, угол между меньшей диагональю и большей стороной равен β. Найдите объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

195. (МЭИ, 1978 г.). Дан треугольник ABC, причем $|BC|=a$, $\widehat{ABC}=\alpha$, $\widehat{ACB}=90^\circ+\alpha$. Определите объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг его высоты, опущенной из вершины A.

196. (МЭИ, 1978 г.). Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, длина высоты $[AB]$ равна h, величина острого угла $\widehat{ADC}$ равна α. Найдите объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой (AB), если точка E — середина отрезка $[CD]$.

197. (МТИМБО, 1982 г.; РГУ, мехмат, 1977 г.). Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен v. При каких значениях β радиус шара наибольший?

198. (РГУ, мехмат, вечерн. отд., 1977 г.). Конус описан около полушара радиуса R так, что центр основания конуса лежит в центре шара. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. Найдите объем конуса. При каком значении α объем будет наименьшим?

Раздел IV
ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

ОБ УСТНОМ ЭКЗАМЕНЕ

Во всех высших учебных заведениях страны устные экзамены проводятся в строгом соответствии с программой по математике для поступающих в высшие учебные заведения (вариант А для поступающих в высшие учебные заведения страны печатается ниже). На устном экзамене поступающему предлагается два-три теоретических вопроса и дается необходимое время для подготовки обстоятельного ответа на эти вопросы. Как правило, вопросы теории формулируются так же, как они сформулированы в программе по математике для поступающих в высшие учебные заведения. Предлагаются, обычно, также две-три задачи. Задачи на устном экзамене могут быть предложены одновременно с вопросами теории, или в ходе ответа на вопросы теории, или после ответа. Задачи могут иметь самый разнообразный характер. Для ознакомления читателей с этим материалом мы публикуем отдельные билеты устных экзаменов некоторых вузов и более четырехсот задач, предлагавшихся на устных вступительных экзаменах ряда вузов страны.

§ 1. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

I. (МИФИ, 1982 г.).

1. Натуральные числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное. Признаки делимости на 2, 3, 5, 10.

2. Признак параллельности плоскостей.

II. (МИСиС, 1978 г.).

1. Понятие первообразной. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции. Интеграл.

2. Существование окружности, описанной около трехугольника.

III. (МИЭТ, 1978 г.).

1. Свойства функции $y=k/x$ и ее график.

2. Формула площади правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

Дополнительные вопросы:

1. Найдите область существования функции $y=\lg(x^2-6x+6)$.

2. Если данная функция — периодическая, найдите наименьший период T: $f(x)=10\sin 3x$.

3. Может ли композиция двух поворотов, имеющих разные центры, быть параллельным переносом?

IV. (МИИГАиК, 1979 г.).

1. Числовые функции. График числовой функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

2. Векторы. Операции над векторами. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.

3. Производная сумма двух функций.

V. (МАРХИ, 1977 г.).

1. Векторы. Операции над векторами. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.

2. Из 3 пирамид и 10 кубов должна быть составлена композиция, насчитывающая 7 тел. Сколькими способами может быть составлена композиция, если в нее должна входить хотя бы одна пирамида?

3. Вычислить площадь фигуры на отрезке $[0; \pi]$, ограниченном осью Oy, прямой $x=\pi$ и кривыми $y=\sin x$ и $y=|\cos x|$.

VI. (МТИММП, 1980 г.).

1. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус вписанной в него окружности.

2. Решите уравнение $\sin x+\sin 3x=0$.

3. Векторы и действия над ними.

Пример. Вычислите длину вектора $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=(1; 1; -1)$, $\boldsymbol{b}=(2; 0; 1)$.

VII. (МИНГП, 1980 г.).

1. Площадь поверхности и объем цилиндра.

2. Тригонометрические функции половинного аргумента.

3. Производная функции $y=\log_a x$.

VIII. (МГМИ, 1979 г.).

1. Теорема косинусов.

2. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

IX. (МГРИ, 1979 г.).

1. Формула n-го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.

2. Свойство середины диагонали параллелепипеда.

3. Производная функции $y=\operatorname{tg} x$.

X. (МТИЛП, 1978 г.).

1. Логарифм произведения, степени, частного.

2. Признак параллельности плоскостей.

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+x}$.

XI. (МТИПП, 1978 г.).

1. Производная произведения двух функций.

2. Сумма углов треугольника.

3. Решите неравенство $\dfrac{\ln(x-1)^2}{3x^2-4x+75}>0$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x-\sqrt{x}$ на промежутке $[0; 4]$.

XII. (МПИ, 1979 г.).

1. Свойства показательной функции.

2. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

3. Решите уравнение $\sin x \sin 3x=\sin 2x \sin 4x$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y=x^3-3x^2+3$ на отрезке [1; 3].

XIII. (МИСИ, 1979 г.).

1. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента.

2. Существование окружности, описанной около треугольников.

3. Определите промежутки монотонности функции $y=x^2-3x$.

4. Решите неравенство $\log_2 x < \log_2 x^2$.

XIV. (МАМИ, 1979 г.).

1. Производная функции $y=\cos x$.

2. Решите неравенство $\log_{0,3}(x^2-1) \geqslant 0$.

3. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

4. Теорема о трех перпендикулярах.

XV. (МИИЗ, 1980 г.).

1. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

2. Признак параллельности прямой и плоскости.

3. Решите уравнение $5^{x+1}+5^x=150$.

4. Упростите выражение $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$.

XVI. (МФИ, 1979 г.).

1. Достаточное условие экстремума функции. (Докажите.)

2. Свойство средней линии трапеции. (Докажите.)

3. Решите неравенство $\log_{0,3}(x+1) > -1$.

4. Вычислите по определению производную функции $y=\sqrt{x}+1$.

XVII. (РПИ, 1980 г.).

1. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

2. Пирамида. Формулы поверхности и объема пирамиды.

3. Решите неравенство $\lg(3x^2+1)-\lg(3x-2)<1$.

4. Упростите выражение $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\dfrac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-1}+\dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha-90^\circ)}-1}$.

5А. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{x}$ на отрезке [1; 6].

5В. Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}-3\operatorname{ctg}^2 x+1=0$.

XVIII. (ВЗПИ, 1980 г.).

1. Функция. Определение. Способы задания функции.

2. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

3. Найдите производную от функции $y=\operatorname{ctg}^3 x$.

XIX. (ВТУЗ ЗИЛ, 1980 г.).

1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$, $\alpha\in[3\pi/2;\ 2\pi]$. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$.

XX. (ВЗИТиЛП, 1979 г.).

1. Свойства функции $y=k/x$ и ее график.

2. Выведите формулу для вычисления площади сферы.

3. Вычислите $\operatorname{arctg} 1+\arccos(-1/2)+\arcsin(-1/2)$.

XXI. (ВЗИИЖТ, 1979 г.).

1. Производные функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$.

2. Свойство точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Найдите предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+7x-2}{6x^3-4x+3}$.

XXII. (ВЗЭИС, 1978 г.).

1. Производная функции $y=\sin x$.

2. Существование окружности, описанной около треугольника.

3. Решите уравнение $\sin x+\cos 2x=1$.

XXIII. (МВМИ, 1981 г.).

1. Решение уравнений вида $\sin x=a$; $\cos x=a$; $\operatorname{tg} x=a$.

2. Свойства показательной функции.

3. Центр симметрии параллелограмма.

4. Решите уравнение $\cos x+\sin 2x=0$.

§ 2. ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

1. (МТИМБО, 1981 г.). Докажите, что дробь $(14n+3)/(21n+4)$ несократима ($n \in \mathbf{Z}$).

2. (МФТИ, 1981 г.). Может ли число n^4+4 ($n \in \mathbf{N}$) быть простым? Если да, то найдите эти простые числа.

3. (МФТИ, 1981 г.). Пусть p и q — два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?

4. (НЭТИ, 1981 г.). Покажите, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

5. (КИЦМ, 1981 г.). Определите сумму всех четных чисел от 12 до 82.

Сравните числа (**6—7**).

6. (ТашГУ, 1981 г.). а) $\sin 3$ и $\cos 3$; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$.

7. (ВГУ, ПММ, 1981 г.). $A=4+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}$, $B=4+\frac{5}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{6}{8^4}$.

8. (МФТИ, 1981 г.). Докажите, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — число иррациональное.

9. (МГУ, ВМК, 1981 г.; МФТИ, 1981 г.). Докажите, что $3<\pi<4$.

10. (ВГУ, хим., географ., биол.-почв. фак. 1981 г.). Сократите дробь $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$.

Упростите выражения (**11—13**).

11. (ПГУ, 1980 г.). $\dfrac{1-a^{-1/2}}{1+a^{1/2}}-\dfrac{a^{1/2}+a^{-1/2}}{a-1}$.

12. (НЭТИ, 1981 г.). $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt[8]{a\ldots\sqrt[512]{a}}}}$.

13. (МФТИ, 1981 г.). $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$.

Докажите, что для любого натурального n **(14—16)**.

14. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.).

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

15. (МИФИ, 1977 г.). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

16. (МИФИ, 1977 г.). $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

17. (ДГУ, 1978 г.). Сколько различных нечетных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 4, 5?

18. (ДГУ, 1978 г.). Сколько существует телефонных номеров, содержащих комбинацию 12, если номер состоит из 5 цифр?

19. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

20. (МИФИ, 1977 г.). Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

21. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.) Прямые l_1, l_2, l_3 параллельны и лежат в одной плоскости. На l_1 взято m точек, на l_2 взято n точек, на l_3 взято k точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

22. (МТИПП, 1978 г.). Коэффициент при x во втором члене разложения $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ равен 31. Найдите n.

Постройте графики функций **(23—67)**.

23. (КГУ, 1981 г.). $y=(|x+1|-|x-1|)/2$.
24. (МИФИ, 1981 г.). $y=|x-1|-x$.
25. (МАРХИ, 1979 г.). $y=|x-1|+|x-2|+x$.
26. (ЯГУ, 1980 г.). $y=|x^2-x|$.
27. (ВГУ, эконом. фак., 1979 г.). $y=x|x-3|$.
28. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак. 1979 г.). $y=(x+1)^3-(x-1)^3$.
29. (МАТИ, 1980 г.). $y=\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}$.
30. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sqrt{1-|x|}$.
31. (МИРЭА, 1978 г.). $y=x^2-2|x+1|-1$.
32. (МАТИ, 1980 г.). $y=x|x|-4x-5$.
33. (БГУ, 1980 г.). $y=(|1-x|+2)(x+1)$.
34. (ЛГУ, 1980 г.). $y=|2x^2-3x+|x-1||$.
35. (МФИ, 1979 г.). $y=\frac{|x-1|}{x-1}(x^2+3)$.
36. (МИХМ, 1979 г.). $y=x(x-3)^2$.
37. (ЯГУ, 1980 г.). $y=1/|x|$.
38. (ЯГУ, 1980 г.). $y=(x+3)/(x-1)$.
39. (МИФИ, 1981 г.). $y=(2x+1)/(x-1)$.
40. (МАТИ, 1978 г.). $y=(2|x|-1)/(x-3)$.
41. (ЛатвГУ, 1980 г.). $y=2^{|x|}+1$.
42. (МАТИ, 1980 г.). $y=2^{(|x|+x)/x}$.

43. (МИФИ, 1981 г.). $y=|\sin x|/\sin x$.
44. (ЯГУ, 1980 г.; ТашГУ, 1981 г.). $y=-2^{-|x|}$.
45. (МИРЭА, 1977 г.). $y=2^{|1-x|}$.
46. (ЯГУ, 1980 г.). $y=3\cdot 2^x-2$.
47. (МИФИ, 1981 г.). $y=2^{|\log_2 x|}$.
48. (ТашГУ, 1981 г.). $y=\log_2|x-1|-1$.
49. (МТИ, 1981 г.) $y=|\log_{1/4}(x/4)|$.
50. (МАТИ, 1978 г.). $y=\log_x \sqrt{x}$.
51. (МАТИ, 1980 г.). $y=\lg|x|-\lg x^2$.
52. (МИФИ, 1981 г.). $y=\log_2(4x-x^2)$.
53. (МИФИ, 1981 г.). $y=\log_2(2-x)$.
54. (МИФИ, 1981 г.). $y=\log_{1/2}(1-x)$.
55. (МИФИ, 1981 г.). $y=|\log_2 x|/\log_2 x$.
56. (НЭТИ, 1981 г.). $y=\log_2(x^2-2x+1)$.
57. (КГУ, мехмат, 1981 г.). $y=\log_{1/2}\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|$.
58. (МАТИ, 1980 г.). $y=\frac{2\,\mathrm{tg}\,(x/2)}{1-\mathrm{tg}^2\,(x/2)}$.
59. (ТашГУ, 1981 г.). $y=\sin|2x|$.
60. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sin^2 x$.
61. (ЯГУ, 1980 г.). $y=x+\sin x$.
62. (МАТИ, 1978 г.). $y=\cos\left(|x|+\frac{\pi}{2}\right)/\sin x$.
63. (НЭТИ, 1981 г.; МИФИ, 1981 г.). $y=\log_{1/2}\sin x$.
64. (МАТИ, 1980 г.). $y=\lg\mathrm{tg}\,x+\lg\mathrm{ctg}\,x$.
65. (МГУ, ВМК, 1980 г.). $y=\log_{|\sin x|}(1/2)$.
66. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.).

$$y=\begin{cases}4^x-1, & \text{если } x<0;\\ \sqrt{4x-x^2}, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

67. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.).

$$y=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & \text{если } x\leqslant 1;\\ 1+\log_{1/2}x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Изобразите на плоскости $(x;\ y)$ множество точек (68—73).

68. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.).

$$\{(x;\ y)\mid x^2+y^2-2x-2y+1=0\}.$$

69. (УрГУ, 1977 г.).

$$\{(x;\ y)\mid (x-|x|)^2+(y-|y|)^2\leqslant 4\}.$$

70. (МИФИ, 1981 г.).

$$\{(x;\ y)\mid |x+y|+|y-x|\leqslant 4\}.$$

71. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.).

$$\{(x;\ y)\mid \log_{(|x|-0,5)}(x^2+y^2)\leqslant\log_{(|x|-0,5)}4\}.$$

72. (МИФИ, 1981 г.).

$$\{(x;\ y)\mid \cos(x+y)=\cos(x-y)\}.$$

73. (МИФИ, 1981 г.). $\{(x;\ y)\mid \sin 2x=\sin 2y\}$.

Линейные и квадратные уравнения и неравенства

74. (МИРЭА, 1978 г.). При каких значениях x функция $y = |x-1|+|x-3|$ имеет наименьшее значение? Найдите это значение.

75. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак., 1979 г.). Решите уравнение $x|x|+2x+1=0$.

76. (МТИ, 1978 г.). Найдите наименьшее значение, принимаемое z, если $z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4$.

Решите неравенства (**77—80**).

77. (МТИ, 1981 г.). $9x-14-x^2>0$.

78. (БарГПИ, 1981 г.). $x^2-5|x|+4<0$.

79. (ЛГПИ, 1981 г.). $|x^2-4x|>1$.

80. (КиевГПИ, 1981 г.). $2x^2-5|x|+3\geqslant 0$.

81. (ТашГУ, 1981 г.). Докажите, что корни квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$ взаимно обратны.

82. (КуйбГУ, мехмат, 1977 г.). Докажите, что если значение квадратного трехчлена ax^2-bx+c является целым числом при $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=2$, то при любом целом x значение данного трехчлена является целым числом.

83. (МФТИ, 1981 г.). Докажите, что если $ax^2+bx+c \in \boldsymbol{Z}$ при всех $x\in \boldsymbol{Z}$, то $a,b,c\in\boldsymbol{Z}$.

84. (ВГУ, физфак, 1981 г.). В уравнении $ax^2-5x+6=0$ определить a, если отношение его корней $x_1/x_2=2/3$.

85. (ВГУ, эконом. фак., 1981 г.). Известно, что для $y = ax^2+bx+c$ имеет место $y(-1)>-4$, $y(1)<0$, $y(3)>5$. Определите знак коэффициента a.

Уравнения высших степеней. Теорема Безу. Рациональные неравенства. Решение неравенств методом интервалов

Решите уравнение (**86—87**).

86. (ДнепрГУ, 1981 г.). $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

87. (МФТИ, 1981 г.). $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$.

88. (МФТИ, 1981 г.). Найдите остаток от деления многочлена x^3+2x^2-2x+5 на x^2-1, не производя операции деления.

89. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Сколько корней имеет уравнение $x^4=5x+2a$ в зависимости от a?

90. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $x^3+ax+2=0$?

91. (МФТИ, 1981 г.). Докажите, что у многочлена $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ не могут быть все корни целыми, если $P(0)$ и $P(-1)$ нечетные.

92. (ЛГПИ, 1981 г.). Решите уравнение $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=3+2x^2$, $g(x)=3x^2-(5x-3)(2-x)$.

Решите неравенства (93—99).

93. (ВГУ, хим., географ., биол.-почв. фак., 1981 г.). $x+\frac{1}{x}<0$.

94. (МГПИ, географ. фак., 1979 г.). $\frac{2-5x}{x+1}>2$.

95. (МИИЗ, 1981 г.). $\frac{x^2+4}{x^2+7x+12}<0$.

96. (МИФИ, 1981 г.). $\frac{x}{x+6}<\frac{1}{x}$.

97. (ЛГПИ, матфак, 1979 г.). $\left|\frac{2x-4}{x+1}\right|>2$.

98. (ТашГУ, 1981 г.) $\frac{x^2-7x+12}{x-4}\geqslant 0$.

99. (МВИМУ, 1981 г.). $\frac{(x-1)^2 x}{x+1}\leqslant 0$.

Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения (100—101).

100. (МАТИ, 1978 г.). $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$.

101. (КГУ, 1981 г.). $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$.

Решите неравенства (102—106).

102. (КГУ, мехмат, физфак, 1981 г.). $\sqrt{4-x^2}\geqslant 1/x$.

103. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак., 1977 г.). $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+3}<5$.

104. (МИФИ, 1981 г.). $x+1<\sqrt{11-x}$.

105. (МФТИ, 1981 г.). $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$.

106. (УрГУ, физфак, 1977 г.). $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$.

Системы уравнений и неравенств

Решите системы уравнений (107—112).

107. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак., 1979 г.). $\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$

108. (КГУ, 1981 г.). $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$

109. (МИРЭА, 1978 г.). $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ x-y=2, \\ x+4y=a. \end{cases}$

110. (МИРЭА, 1978 г.). $\begin{cases} x+2y=3, \\ ax-4y=-6, \\ x+y=1. \end{cases}$

111. (ПГУ, 1980 г.). $\begin{cases} x+y=9, \\ x^{1/3}+y^{1/3}=3. \end{cases}$

112. (ЛГУ, физфак, 1977 г.). $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=12. \end{cases}$

113. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a^2? \end{cases}$

114. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x-y=a(1+xy), \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

имеет только одно решение?

Логарифмические и показательные уравнения, неравенства и системы

Упростите выражения (**115—119**).

115. (НЭТИ, 1981 г.). $\log_{1/4}(\log_2 3\cdot\log_3 4)$.

116. (ЯГУ, 1980 г.). а) $5^{\lg 5/\lg 25}$; б) $\log_2\lg 100$.

117. (БарГПИ, матфак, 1981 г.). $\log_3 64\cdot\log_2(1/27)$.

118. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак., 1979 г.).

$$(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2.$$

119. (ХАИРЭ, 1981 г.). $0{,}8\cdot(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65}5}$.

120. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}6^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}9^\circ\ldots\lg\operatorname{tg}87^\circ$.

Определите знак числа (**121—122**).

121. (ВГУ, хим., биол.-почв. фак., 1979 г.). $\log_3 4-\log_4 3$.

122. (НЭТИ, 1981 г.). $\log^2_{1/3}0{,}4-\log_{1/4}0{,}4$.

123. (МИФИ, 1981 г.). Вычислите $\log_5 9{,}8$, если $\lg 2=a$, $\lg 7=b$.

124. (МГУ, ВМК, 1980 г.). Вычислите $\log_9 40$, если $\lg 15=a$, $\log_{20}50=b$.

Найдите область определения функции (**125—131**).

125. (ХАИРЭ, 1981 г.). $y=\sqrt{2^x-3^x}$.

126. (ХАИРЭ, 1981 г.). $y=\dfrac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$.

127. (ЛГПИ, 1981 г.). $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}$.

128. (МТИИП, 1981 г.). $y=\log_3\log_{1/2}x$.

129. (ЛГПИ, физфак, 1981 г.). $f(x)=\log_{2x-5}(x^2-3x-10)$.

130. (ВГУ, эконом. фак, 1981 г.). $y=\lg\left(\sqrt{x^2-5x-24}-x-2\right)$.

131. (КиевГПИ, 1979 г.). $y=\log_2\sin x$.

Решите уравнения (**132—154**).

132. (ЯГУ, 1980 г.). $\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=2$.

133. (ЛГПИ, 1981 г.). $6\cdot 9^{0{,}5x-2}+2\cdot 3^{x-6}=56$.

134. (КИЦМ, 1981 г.). $(0{,}25)^{2-x}=\frac{1}{2^{x+3}}$.

135. (МИИЗ, 1981 г.). $\lg(5-x)+\lg(3-x)=1$.

136. (ЯГУ, 1980 г.) $\log_3\log_4\log_2 x=0$.

137. (ЯГУ, 1980 г.). $\log_2|x-1|=1$.

138. (МТИПП, 1979 г.). $\lg(3x-2)-2=\frac{1}{2}\lg(x+2)-\lg 50$.

139. (ПГУ, 1980 г.). $\lg(3+2\lg(1+x))=0$.

140. (БарГПИ, матфак, 1981 г.). $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{2x-1}=$ $=\lg\sqrt{3x+3}$.

141. (КуйбГУ, 1977 г.). $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$.

142. (ЯГУ, 1980 г.). $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

143. (КиевГПИ, 1979 г.). $\frac{\log_5(2x+3)}{1-\log_5(2x+3)}+\frac{3}{5-\log_5(2x+3)}=0$.

144. (ДнепрГУ, 1981 г.). $\log_2(4^x+4)-\log_2(2^{x+1}-3)=x$.

145. (ЯГУ, 1980 г.). $\log_8 x+\log_8^2 x+\log_8^3 x+\ldots=1/2$.

146. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.). $\log_3\cos x+$ $+\log_{1/3}(1-\sin x)=0$.

147. (КГУ, 1981 г.). $\log_2\sin x+\log_{1/2}(-\cos x)=0$.

148. (МИРЭА, 1978 г.). $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 0{,}25^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)/\cos 2x}+$ $+1=0$.

149. (КуйбГУ, физфак, 1977 г.). $\log_2\sin x-\log_2\cos x-$ $-\log_2(1-\operatorname{tg}x)-\log_2(1+\operatorname{tg}x)=1$.

150. (ДнепрГУ, 1981 г.). $\log_{a^4}x-\log_{a^2}x+\log_a x=0{,}75$.

151. (МИИЗ, 1981 г.). $x^{\lg x-3}=0{,}01$.

152. (МТИПП, 1978 г.). $x^{\lg x-3}=10^{\lg(10/3)-1}$.

153. (ДГУ, 1978 г.). $(\sqrt[3]{x})^{\log_x 11-2}=11$.

154. (МАРХИ, 1979 г.). $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

155. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.). При каких a уравнение $3x\lg x=1+a\lg x$ имеет: а) одно решение; б) два решения?

156. (КГУ, мехмат, физфак, 1979 г.). Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $x^2e^{2-|x|}=4a$?

Решите следующие системы уравнений **(157—160)**.

157. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=1,\\ x+y=3.\end{cases}$

158. (ЯГУ, 1980 г.). $\begin{cases}\log_3(xy)=3,\\ \log_{1/3}(x/y)=1.\end{cases}$

159. (МАРХИ, 1979 г.). $\begin{cases}(3x+y)^{x-y}=9,\\ \sqrt[x-y]{324}=18x^2+12xy+2y^2.\end{cases}$

160. (ВГУ, эконом. фак., 1981 г.). $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

Решите неравенства **(161—186)**.

161. (ЯГУ, 1980 г.). $2^x+3^x\geqslant 2$.

162. (ЯГУ, 1980 г.). $2\cdot 2^x<3^{x-1}$.

163. (МАТИ, 1978 г.). $4^x-5\cdot 2^x-1>0$.

164. (МТИ, 1981 г.). $\log_{0,5}((2-x)/3) < 0$.
165. (ТашГУ, 1981 г.). $\log_{1/2}(x^2-2x+4) > -2$.
166. (ВГУ, 1980 г.). $\log_{1/\sqrt{2}}(x+4) < 2$.
167. (КИЦМ, 1981 г.). $\log_{1/3}(x-1) - \log_{1/\sqrt{3}}(2x-3) < 0$.
168. (МИИЗ, 1981 г.). $\log_{0,5}(3x-1) > \log_{0,5}(3-x)$.
169. (МИИЗ, 1980 г.). $\log_2|x| < 3$.
170. (МИИЗ, 1980 г.). $|\log_3 x| < 2$.
171. (МИРЭА, 1978 г.). $\frac{1}{\log_3 x} < 1$.
172. (МИФИ, 1981 г.). $\log_{1/2}\log_3(1-x) > -1$.
173. (МТИПП, 1979 г.). $(1/2)^{\log_2(x^2-2x-3)} > 1$.
174. (МИФИ, 1981 г.). $\log_{1/3}\log_2(x^2-8) \geqslant -1$.
175. (МАРХИ, 1979 г.). $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.
176. (ПГУ, 1980 г.). $\lg(6/x) > \lg(x+5)$.
177. (ВГУ, матфак и ПММ, 1979 г.). $\log_{x-3}(x-4) < 2$.
178. (ДГУ, физфак, 1978 г.). $\log_{x-3}(x-1) < 2$.
179. (КиевГПИ, 1979 г.). $\log_{x^2}(2+x) < 1$.
180. (ВГУ, ПММ, 1981 г.). $\log_a \frac{4}{x-3} \geqslant 0,\ 0 < a < 1$.
181. (ВГУ, ПММ, 1981 г.). $\log_{x+0,5} 2 < \log_x 4$.
182. (МИФИ, 1981 г.). $\log_{2x+3} x^2 < 1$.
183. (МФТИ, 1981 г.). $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.
184. (МФТИ, 1981 г.). $\log_{1/2}(2^{-x} - 100\sin x) < x$.
185. (УрГУ, 1977 г.). $\log_a(1-x^2) \geqslant 1$.
186. (КГУ, 1981 г.). $|x-2|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1$.
187. (УрГУ, 1977 г.). Решите систему неравенств $\log_{1/2}\cos x < \log_{1/2}\operatorname{tg} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.
188. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a уравнение $x\ln|x| = a$ имеет один корень?

Преобразование тригонометрических выражений

Выясните, какое число больше (189—191).
189. (КиевГПИ, 1981 г.). $\sin 1980°$ или $\cos 1980°$?
190. (ПГУ, 1980 г.). $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{arctg} 1$?
191. (КИЦМ, 1981 г.). $\sin 2$ или $\cos 3$?
Вычислите (192—214).
192. (МИИЗ, 1977 г.). $\arcsin(-1) + 2\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.
193. (МТИММП, 1977 г.). $\sin(\arcsin(3/5) - \arccos(3/5))$.
194. (ЛГПИ, 1981 г.). $\operatorname{tg}(\arccos(1/2) + \arcsin(\sqrt{3}/2))$.
195. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $\operatorname{arctg} 1 + \arccos(-1/2) + \arcsin(-1/2)$.
196. (МИФИ, 1979 г.). $\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arcctg}(1/\sqrt{2})$.
197. (МИФИ, 1978 г.). $\sin(2\operatorname{arctg} 2)$.
198. (МИФИ, 1978 г.). $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$.

199. (МИФИ, 1978 г.). $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

200. (МИФИ, 1978 г.). $\arcsin(\sin(8\pi/7))$.

201. (МИФИ, 1978 г.). $\arccos(\cos(8\pi/7))$.

202. (МИФИ, 1978 г.). $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}\right)$.

203. (МТИЛП, 1979 г.). $\sin\alpha$, если $\sin(\alpha/2)+\cos(\alpha/2)=7/5$.

204. (ЯГУ, 1980 г.). $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=b$.

205. (ВЗИТиЛП, 1979 г.). $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-7$.

206. (МТИЛП, 1979 г.). $\frac{\cos^4\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

207. (ЯГУ, 1980 г.). $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

208. (ЯГУ, 1980 г.). $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a$.

209. (КиевГПИ, 1979 г.). $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$, если $\sin\alpha=-(3/5)$.

210. (МИФИ, 1981 г.). $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\cos\alpha=-3/5$, $\pi/2<\alpha<\pi$,

211. (ТашГУ, 1981 г.). $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\sin 2\alpha=0{,}6$; $0<\alpha<\pi/4$.

212. (ПГУ, 1980 г.). $65\cos(B-A)$, если $\sin A=-4/5$, $3\pi/2<A<2\pi$; $\cos B=5/13$, $0<B<\pi/2$.

213. (КИЦМ, 1981 г.). $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=12/5$, $\pi<\alpha<3\pi/2$.

214. (МИИЗ, 1981 г.). $\sin 2\alpha$ и $\sin(\alpha/2)$, если $\operatorname{tg}\alpha=5/12$, $\pi<\alpha<3\pi/2$.

215. (НЭТИ, 1981 г.). Преобразуйте в произведение

$$1+\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-1}.$$

216. (ЯГУ, 1980 г.). Докажите, что если $\alpha+\beta=\pi/4$, то $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$.

217. (КуйбГУ, мехмат, 1977 г.). Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

218. (ЯГУ, 1980 г.). Упростите выражение

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin(\pi+3\alpha)}{2\cos\alpha+1}.$$

Докажите следующие тождества **(219 — 223)**.

219. (МАРХИ, 1981 г.). $\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha+\frac{1}{32}\cos 6\alpha$.

220. (ДнепрГУ, 1981 г.). $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$.

221. (ВГУ, ПММ, 1981 г.). $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

222. (БарнГПИ, матфак, 1981 г.). $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

223. (МФТИ, 1981 г.). $\frac{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}{(1+\sin x)(1-\cos 2x)} = \frac{1-\sin x}{1-\cos x}$.

Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите следующие уравнения (224—234).

224. (МИИЗ, 1981 г.). $\sin 5x - \sin 3x = 0$.

225. (ТашГУ, 1981 г.). $\sin^3 x + \sin^2 x = 1 + \sin x$.

226. (МТИММП, 1981 г.). $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

227. (НЭТИ, 1981 г.). $\sin \alpha = \sin 2\alpha$.

228. (ПГУ, 1980 г.). $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$.

229. (ЯГУ, 1980 г.). $\operatorname{tg}^2 33x = \cos 2x - 1$.

230. (МАТИ, 1978 г.). $6\cos^2 x + 11 \sin x - 10 = 0$.

231. (МФТИ, 1981 г.). $\sin 3x + \cos 4x - 4\sin 7x = \cos 10x + \sin 17x$.

232. (МТИПП, 1981 г.). $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0{,}25$.

233. (КиевГПИ, 1979 г.). $\sin x \cos x \cos 2x = -1/2$.

234. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). $\operatorname{tg}|x| = |\operatorname{tg} x|$.

235. (НЭТИ, 1981 г.). Имеет ли решения уравнение $4\sin 2x + \cos x = 5$?

236. (НЭТИ, 1981 г.). Решите уравнение $f'(0) = f'(x)$, если $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$.

237. (МФТИ, 1981 г.). При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

238. (МИРЭА, 1977 г.). Сколько корней имеет уравнение $\log_{(5\pi/2)} x = \cos x$?

Решите неравенства (239—240).

239. (КиевГПИ, 1979 г.). $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \frac{1}{2}$.

240. (КуйбГУ, 1977 г.). $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 5\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 > 0$.

241. (МИФИ, МФТИ, 1981 г.). Найдите максимальное значение функции $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Прогрессии

242. (МАРХИ, 1979 г.). Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

243. (ЯГУ, 1980 г.). Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов ее членов 48. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Пределы

244. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Будет ли монотонной последовательность $a_n=\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$, $n\in N$?

Вычислите пределы (245—266).

245. (КИЦМ, 1981 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1-9n^2}$, $n\in N$.

246. (НЭТИ, 1981 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+1}{0{,}1n^2+0{,}001n}$, $n\in N$.

247. (ЯГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n^2+3}{12n^4-7n^2+n}$, $n\in N$.

248. (КиевГПИ, 1979 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{0{,}25n^2+n+3}$, $n\in N$.

249. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$, $n\in N$.

250. (КГУ, 1981 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+5^n}$, $n\in N$.

251. (МИФИ, 1981 г.). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^n-2^{2n}}{5^n+2^n+3^{n+3}}$, $n\in N$.

252. (ВЗПИ, 1980 г.). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

253. (ЯГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$.

254. (ПГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{(x+3)(x-5)}$.

255. (МТМИ, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-x^2}$.

256. (МТИПП, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to -2/3}\frac{6x^2-5x-6}{3x^2-x-2}$.

257. (ПГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$.

258. (МТИ, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x}$.

259. (ВГУ, матфак, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

260. (ХАИРЭ, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

261. (МИХМ, 1981 г.). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-3}}{x^2-4}$.

262. (МИРЭА, 1978 г.). $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

263. (ЯГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

264. (ЕГУ, 1981 г.). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}$.

265. (ЯГУ, 1980 г.). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}$.

266. (МИРЭА, 1978 г.). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}$.

267. (ВГУ, матфак, ПММ, 1979 г.). Через точку A под углом в 30° проведены два луча. На одном из них на расстоянии a от точки A взята точка B. Из нее опущен перпендикуляр на другой луч, из его основания опущен перпендикуляр на $[AB]$ и т. д. Найдите длину полученной бесконечной ломаной.

Производная. Исследование функций с помощью производной

Найдите производные функции (268—271).

268. (ВЗПИ, 1980 г.). а) $\operatorname{ctg}^3 x$; б) $\sin\sqrt{x}$.

269. (МТИ, 1981 г.). $\log_5(2x^2-3x+1)$.

270. (КИЦМ, 1981 г.). $(2x^3-5)\operatorname{tg} x$.

271. (МГМИ, 1981 г.). а) $\sqrt{\ln x}$; б) $\sqrt{\sin 2x}$; в) $(\sin 2x+8)^3$.

Найдите производную функцию в указанной точке (272—275).

272. (ТашГУ, 1981 г.). $y=\ln(2-\sqrt{2x+1})$, $y'(0)=?$

273. (ВЗПИ, 1980 г.). $y=(4x+5)^2$, $y'(0)=?$

274. (ХАИРЭ, 1981 г.). $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$, $f'(0)=?$

275. (ХАИРЭ, 1981 г.). $f(x)=\sin 4x\cos 4x$, $f'(\pi/3)=?$

Найдите интервалы возрастания и убывания функции (276—280).

276. (МАТИ, 1979 г.). $f(x)=2x+\frac{2}{x}$.

277. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=x+\ln(1-4x)$.

278. (МИФИ, 1981 г.). $f(x)=x^2e^{-x}$.

279. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=x/\ln x$.

280. (МТИ, 1981 г.). $y=3+8x+4x^4$.

Докажите возрастание функций (281—283).

281. (МАТИ, 1978 г.). $y=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+2$ при $x>0$.

282. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). $f(x)=\frac{2}{3}x^9-x^6+2x^3-3x^2+6x-1$ при $x\in\mathbf{R}$.

283. (ХАИРЭ, 1981 г.). $y=2x+\sin x$ при $x\in\mathbf{R}$.

Определите, при каких значениях a функция возрастает на всей числовой оси (284—286).

284. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). $f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$.

285. (КГУ, 1979 г.). $f(x)=2e^x-ae^{-x}+(2a+1)x-3$.

286. (КГУ, 1981 г.). $y=\sin x-a\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+2ax$.

287. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a функция $y=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-1$ монотонно убывает на всей числовой оси?

Найдите критические точки функции (288—289).

288. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=(x^2-4)^{10}$.

289. (МИРЭА, 1978 г.). $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+4$.

290. (ХАИРЭ, 1981 г.). Найдите экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

291. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a точки экстремума функции $y=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x+1$ лежат в промежутке $]-2;\ 4[$?

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции (292—296).

292. (ДГУ, физфак, 1978 г.). $f(x)=\cos^2 x+\cos x+3$.

293. (НЭТИ, 1981 г.). $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$ на $[1/4;\ 1]$.

294. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}$ на $[0;\ 100]$.

295. (ЯГУ, 1980 г.). $f(x)=e^{x^2-4x+3}$ на $[-5;\ 5]$.

296. (МТИПП, 1981 г.). $y=2x-\sqrt{x}$ на $[0;\ 4]$.

297. (КГУ, 1979 г.). При каких значениях a функция $f(x)=x^3+3(a-7)x^2+3(a^2-9)x-1$ имеет положительную точку максимума?

298. (КГУ, 1979 г.). Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка максимума и точка минимума функции $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$. При каких a справедливо, что $x_1^2=x_2$?

299. (КГУ, 1979 г.). При каких a функция $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ имеет отрицательную точку минимума?

300. (УрГУ, 1977 г.). Найдите все значения параметра a, при которых точки минимума функции $y=1+a^2x-x^3$ удовлетворяют неравенству $\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}\leqslant 0$.

301. (КГУ, 1981 г.). В какой точке промежутка $]0;\ \pi/2[$ функция $y=(\operatorname{tg} x+1)^2/\operatorname{tg} x$ принимает наименьшее значение?

302. (МТИПП, 1979 г.). Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает наименьшую сумму.

303. (МТИПП, 1979 г.). Найдите положительное число, которое будучи сложенным с обратным ему числом, даст наименьшую сумму.

304. (НЭТИ, 1981 г.). Среди равнобедренных треугольников с данной длиной a боковой стороны найдите треугольник наибольшей площади.

305. (ВГУ, матфак, ПММ, 1979 г.). Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R.

Касательные к кривым

306. (НЭТИ, 1981 г.). Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0=\pi/4$.

307. (ЛГПИ, 1981 г.). На кривой $y=4x^2-6x+3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

308. (ХАИРЭ, 1981 г.). Под каким углом синусоида $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

309. (ВГУ, 1980 г.). К графику функции $y=\ln x^2$ постройте касательную, параллельную прямой $y=-x$.

Напишите уравнение касательной к графику кривой в указанной точке (**310—315**).

310. (ВГУ, матфак, ПММ, 1979 г.). $y=\sin 2x$ в точке $x=\pi/12$.

311. (МИРЭА, 1978 г.). $y=x^3$ в точке $x=2$.

312. (ХАИРЭ, 1981 г.). $y=x^2e^{-x}$ в точке $x=1$.

313. (ВГУ, физфак, 1981 г.). $y=\sin x+1$ в точке $x=\pi/2$.

314. (ЛГПИ, 1981 г.). $y=x^2-4$ в точке пересечения ее с осью ординат.

315. (КиевГПИ, 1979 г.). $y=2x^2-4x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

316. (МГМИ, 1981 г.). Напишите уравнение касательной к кривой $y=x^2-7x+3$, которая параллельна прямой $5x+y-3=0$.

317. (ЯГУ, 1980 г.). Докажите, что касательная к гиперболе $y=a^2/x$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

Разные задачи

318. (МАРХИ, 1977 г.). Почленным дифференцированием тождества $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ докажите тождество $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

319. (МАРХИ, 1977 г.). В каких точках производная функции $y = x^3$ совпадает со значением самой функции?

320. (ЯГУ, 1980 г.). Касается ли прямая $x + 4y - 4 = 0$ гиперболы $y = 1/x$?

321. (МВИМУ, 1981 г.). На какой промежуток отображает производная функции $y = \sqrt[4]{x^3}$ промежуток $[1/16;\ 81]$?

322. (МГМИ, 1981 г.). Является ли четной или нечетной функция: а) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; б) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$; в) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

323. (МГМИ, 1981 г.). Найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$.

324. (МГМИ, 1981 г.). Найдите квадратичную функцию $f(x)$, если $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 5$.

325. (МГМИ, 1981 г.). Найдите функцию, обратную функции $y = x^2 - 1$, $x \in]-\infty;\ 0]$.

326. (ВГУ, матфак, ПММ, 1979 г.). Через какую точку A на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной и прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, имела наименьшую площадь?

Первообразная. Интеграл.

327. (МИРЭА, 1978 г.; ЛГПИ, 1981 г.). Найдите первообразную функции $y = 2/\sin^2 3x$, график которой проходит через точку $(\pi/12;\ 1)$.

328. (НЭТИ, 1981 г.). Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \cos 4x$, если $F(\pi/24) = 1$.

329. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). При каких значениях x обращается в нуль та из первообразных функции $f(x) = \pi \sin \pi x + 2x - 4$, которая при $x = 1$ имеет значение 3?

330. (МГМИ, 1981 г.). Найдите первообразную функции $(\sin(x/2) + \cos(x/2))^2$.

Вычислите интегралы **(331—338)**.

331. (МИРЭА, 1978 г.). $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$.

332. (МТИ, 1981 г.). $\int\limits_0^{\pi/4} 8\cos 3x\,dx$.

333. (ЯГУ, 1980 г.). $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}$.

334. (ЯГУ, 1980 г.). $\int\limits_0^{2e} \frac{dx}{0{,}5x+1}$.

335. (ЯГУ, 1980 г.). $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$.

336. (ЯГУ, 1980 г.). $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx$.

337. (ДнепрГУ, 1980 г.). $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,dx$.

338. (КиевГПИ, 1979 г.). $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos 3x\,dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (339—349).

339. (ВЗПИ, 1980 г.). $y=x^2$, $y=0$, $x=5$.

340. (МТИПП, 1980 г.). $y=x^2-2x+5$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.

341. (ЯГУ, 1980 г.). $y=x^3$, $y=27$, $x=0$.

342. (ЯГУ, 1980 г.). $y=x^3$, $y^2=x$.

343. (ЯГУ, 1980 г.). $y=\sin x$, $y=2x/\pi$.

344. (ТашГУ, 1981 г.). $y=\sin x$, $y=2x/\pi$, $0\leqslant x\leqslant \pi/2$.

345. (МИРЭА, 1978 г.). $y=\frac{x^2}{4}-1$, $y=2-x$.

346. (МТИ, 1981 г.). $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

347. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). $y=2+\sin x$, $y=1+\cos^2 x$, $x=0$, $x=\pi$.

348. (ДГУ, физфак, 1978 г.). $y=-3x^2-|x|+2$, $y=0$.

349. (УрГУ, физфак, 1977 г.). $|y|=1-x^2$.

350. (УрГУ, мехмат, 1977 г.). Верно ли, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{x-1}$, $y=0$, $x=2$, $x=0$, меньше 2?

351. (КиевГПИ, 1979 г.). Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+1$ и касательными, проведенными к этому графику в точках с абсциссами $x=0$ и $x=2$.

352. (КиевГПИ, 1979 г.). Через начало координат проведите прямую, делящую криволинейный треугольник с вершиной в начале координат, ограниченный линиями $y=2x-x^2$, $y=0$, $x=1$, на две равновеликие части.

353. (ТашГУ, 1981 г.). При каком k площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3$ и $y=kx+2$ будет минимальной? Вычислите эту площадь.

354. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Вычислите объем пространственной фигуры, образованной вращением вокруг прямой $y=1$ плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=1+\cos^2 x$ на промежутке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ и этой прямой.

355. (ВГУ, ПММ, 1981 г.). Найдите все положительные a, удовлетворяющие условию $\int\limits_0^a (3x^2+4x-5)\,dx=a^3-2$.

356. (МВИМУ, 1981 г.). Найдите все значения a, для которых выполняется неравенство $\int\limits_0^a x\,dx \leqslant a+4$.

Векторная алгебра

357. (МТИПП, 1980 г.). Вычислите длину вектора $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=(1;\ 1;-1)$, $\boldsymbol{b}=(2;\ 0;\ 0)$.

358. (ЯГУ, 1980 г.). При каком значении k длина вектора $\boldsymbol{a}=(-2;\ 2;\ 4k)$ вдвое меньше длины вектора $\boldsymbol{b}=(3;\ 3k;\ 0)$?

359. (МГМИ, 1981 г.). Вычислите длину вектора $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{b}=(3;\ -2;\ 1)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$, $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

360. (ЯГУ, 1980 г.). Найдите угол между векторами $\boldsymbol{a}=(3;\ 1;\ -2)$ и $\boldsymbol{b}=(-2;\ 3;\ 4;)$.

361. (ЯГУ, 1980 г.). Определите, при каком значении m векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ перпендикулярны.

362. (ТашГУ, 1981 г.). При каком значении a угол между векторами $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{y}=a\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ равен $\arccos(1/2\sqrt{3})$?

363. (МИФИ, 1981 г.). Вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{b}=(1;\ 2;\ 3)$ и $\boldsymbol{c}=(-2;\ 4;\ 1)$ и удовлетворяет условиям $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-6$. Найдите $\boldsymbol{a}$.

364. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Найдите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$, если известно, что $|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{q}|=3$ и $(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}})=\pi/4$.

365. (КГУ, 1981 г.). Известно, что $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$. Докажите, что $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}=-3/2$.

366. (МТИ, 1981 г.). С помощью векторов докажите, что средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и ее длина равна половине длины третьей стороны.

367. (ЛГПИ, 1981 г.). Дан треугольник ABC и M — произвольная точка на стороне AB. Прямая, проведенная через точку M параллельна медиане CC_1, пересекает (CA) в точку P, а (CB) — в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{CC_1}$.

368. (ЛГПИ, 1981 г.). Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCD$ имеет место соотношение $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$, где M и P — середины отрезков AB и CD соответственно.

Планиметрия

369. (ЯГУ, 1980 г.). Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

370. (МИФИ, 1981 г.). Даны отрезки a, b. Постройте отрезок $\sqrt{ab}$.

371. (МИФИ, 1981 г.). По двум сторонам и медиане, выходящей из общей вершины данных сторон, постройте треугольник.

372. (МИФИ, 1981 г.). Дана окружность C и точка A, лежащая вне круга, ограниченного окружностью C. Постройте прямые, проходящие через точку A, касательные к окружности C.

373. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Можно ли из отрезков, равных медианам треугольника, построить треугольник?

374. (ЛГПИ, 1981 г.). В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

375. (ТашГУ, 1981 г.). Докажите, что если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?

376. (МИФИ, 1978 г.; ЯГУ, 1980 г.; КГУ, 1981 г.). Докажите, что если в многоугольник можно вписать окружность, то $r=S/p$, где r — радиус окружности, S — площадь, а p — полупериметр многоугольника.

377. (МИФИ, 1981 г.). Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

378. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Докажите, что отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон равно 3/4.

379. (МГУ, ВМК, 1980 г.). Докажите, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

380. (КГУ, мехмат, физфак, 1977 г.). Докажите, что сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного многоугольника равна n^2r^2, где n — число сторон многоугольника, а r — радиус описанной окружности.

381. (ЯГУ, 1980 г.). Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит его боковые стороны?

382. (ЯГУ, 1980 г.). Найдите углы ромба, в котором диагональ равна стороне.

383. (ВГУ, матфак, ПММ, 1979 г.). Определите длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образуют арифметическую прогрессию, а периметр треугольника равен 15.

384. (МИФИ, 1981 г.). Найдите углы треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.

385. (КГУ, 1981 г.). Найдите острый угол между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными из вершин его острых углов.

386. (КГУ, 1981 г.). Вычислите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

387. (ТашГУ, 1981 г.). Квадрат со стороной a повернут вокруг центра на 45°. Найдите площадь общей части «старого» и «нового» квадратов.

388. (НЭТИ, 1981 г.). Имеется квадрат и равновеликий ему круг. Что больше, длина окружности или периметр квадрата?

389. (ВГУ, мехмат, ПММ, 1981 г.). Существует ли треугольник, все высоты которого меньше 1 см, а площадь больше или равна 10 см²?

390. (ЛГПИ, 1981 г.). Найдите радиус сектора, если его площадь равна 144 см², а дуга содержит 4/9 радиана.

391. (ТашГУ, 1981 г.). Периметр кругового сектора равен l. Найдите величину центрального угла сектора, при котором его площадь будет наибольшей.

Стереометрия

392. (ЯГУ, 1980 г.). Радиус сферы увеличился на 50%. На сколько процентов увеличилась площадь поверхности сферы?

393. (УрГУ, физфак, 1977 г.). Найдите объем параллелепипеда с ребрами a, b, c, образующими друг с другом углы $\pi/2$, α, α.

394. (МАРХИ, 1979 г.). Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найдите высоту пирамиды.

395. (БарГПИ, 1981 г.). Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V, а ее высота H. Определите длину апофемы пирамиды.

396. (КГУ, 1981 г.). Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

397. (МВИМУ, 1981 г.). Найдите угол между непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

398. (ВГУ, эконом. фак. 1981 г.). Куб с ребром a срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определите объем полученного многоугольника.

399. (ВГУ, эконом. фак. 1981 г.). В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр с высотой h. Найдите радиус основания цилиндра.

400. (ДГУ, физфак, 1978 г.). В шар вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

Разные задачи

401. (КГУ, 1981 г.). Пусть $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. При каких a и b выполняется равенство $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$?

402. (КГУ, 1981 г.). Вычислите $x_1^4+x_2^4$, где x_1 и x_2—корни уравнения $3x^2-5x-1=0$.

Решите уравнения (403—413).

403. (КГУ, 1981 г.). $3^x+1-|3^x-1|=2\log_5|6-x|$.

404. (КГУ, 1981 г.). $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

405. (КГУ, 1981 г.). $2\pi\cos x=|x|-|x-\pi|$.

406. (МАРХИ, 1981 г.). $\lg(2^x+x-41)=x(1-\lg 5)$.

407. (МАРХИ, 1981 г.).

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0.$$

408. (УЭИИЖТ, 1981 г.). $\sqrt{5-\log_2 x}=3-\log_2 x$.

409. (МАИ, 1981 г.). $\cos 3x+\sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)=-2$.

410. (ТашГУ, 1981 г.). Сколько корней уравнения

$$\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$$

лежит в отрезке $[-\pi;\ \pi]$?

Сколько корней имеет уравнение (411—413).

411. (КГУ, 1981 г.). $x^4+x^3=10$?

412. (КГУ, 1981 г.). $3^{|x|}|2-|x||=1$?

413. (КГУ, 1981 г.). $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$?

414. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a уравнение x^3+ $+ax+2=0$ имеет три корня?

415. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a уравнение $x^2e^x=$ $=a$ имеет три корня?

416. (КГУ, 1981 г.). При каких a уравнение $|\ln x|-ax=0$ имеет три корня?

417. (УЭИИЖТ, 1981 г.). Найдите решение уравнения $\cos^2 x=1$, для которых $x^2\leqslant 20$.

418. (УЭИИЖТ, 1981 г.). Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha$ удовлетворяет уравнению $25\cos^2\alpha+5\cos\alpha-12=0$ и $\pi/2<\alpha<\pi$.

Решите неравенства (419—423).

419. (КГУ, 1981 г.). $\sqrt{25-x^2}\leqslant 12/x$.

420. (КГУ, 1981 г.). $\log_{(1+x^2)/2|x|}(5-x^2)\geqslant 0$.

421. (МАРХИ, 1981 г.). $0{,}11^{\log_3((4x-1)/(3x+2))}>1$.

422. (МАРХИ, 1981 г.). $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$.

423. (УЭИИЖТ, 1981 г.). $\frac{x+1}{x+5}+\frac{x}{x-1}<\frac{2x^2+5x}{x^2+4x-5}$.

Найдите пределы (424—425).

424. (МАРХИ, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$.

425. (МАРХИ, 1981 г.). $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|}$.

Найдите участки монотонности и точки экстремума функции (426—427).

426. (КГУ, 1981 г.). $y=xe^{-3x}$.

427. (КГУ, 1981 г.). $y=x/\ln x$.

428. (КГУ, 1981 г.). Докажите, что функция $y=3x^4-4x^3+6x^2+ax+b$ при любых a и b имеет только одну точку экстремума.

429. (КГУ, 1981 г.). Для каких значений функция $y=(\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+a^2)^3 \operatorname{tg} x$ достигает наименьшего значения на промежутке $]0;\ \pi/2[$ в точке $x=\pi/3$?

430. (КГУ, 1981 г.). При каких значениях a минимальное значение функции $y=x^2-4ax-a^4$ принимает наибольшее значение?

431. (КГУ, 1981 г.). Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

432. (УЭИИЖТ, 1981 г.). Вычислите интеграл $\int\limits_0^3 (3x-x^2)\,dx$ и объясните его геометрический смысл.

433. (УЭИИЖТ, 1981 г.). Точка движется по закону $s(t)=-2t^2+8t+7$ до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. Найдите пройденный при этом путь.

434. (МАРХИ, 1981 г.). Найдите наибольший объем треугольной пирамиды $MABC$, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($|AB|=|BC|$), если $[MB]\perp(ABC)$ и $|MA|=\sqrt{3}$.

435. (МАРХИ, 1981 г.). Вычислите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$ и осью абсцисс, $x\in[-\pi/2;\ \pi/2]$.

436. (КГУ, 1981 г.). Если точка $(x;\ y;\ z)$ лежит на плоскости $x+y+z=3$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant 3$. Докажите это.

437. (МАИ, 1981 г.). Пирамида задана координатами вершин $S\ (0;\ 0;\ 2)$, $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0;\ 0)$, $C\ (0;\ 1;\ 0)$. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Oz, и координаты точки N, лежащей в плоскости (SBC), если известно, что $\overrightarrow{MN}=(1/3;\ 1/3;\ 0)$.

438. (УЭИИЖТ, 1981 г.). Даны точки $A\,(2;\ 1;\ -1)$, $B\,(3;\ 2;\ -1)$ и $C\,(3;\ 1;\ 0)$. Найдите величину угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

§ 3. ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗЫ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать: а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы; б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику; в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Программа по математике для поступающих в высшие учебные заведения в 1983 году состоит из трех разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем). Во втором разделе указаны теоремы, которые надо уметь доказывать. Содержание теоретической части экзаменов должно черпаться из этого раздела. В третьем разделе перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

Вопросы, отмеченные звездочкой, должны опускаться при экзаменовке лиц, не обучавшихся все 10 лет по новой школьной программе.

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное.

2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 10.

3. Рациональные числа, их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

4. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел. Сложение, вычитание, умножение и деление действительных чисел.

5. Числовые промежутки. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

7. Степень с натуральным показателем. Определение и свойства арифметического корня.

8. Степень с рациональным показателем. Понятие о степени с иррациональным показателем.

9. Одночлен и многочлен. Стандартный вид многочлена.

10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена.

11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Функция, обратная данной.

12. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

13*. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

14. Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной $y=ax^2+bx+c$, степенной $y=ax^n$ $(n\in Z)$, показательной $y=a^x$, $a>0$, логарифмической, тригонометрических функций ($y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$), арифметического корня $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in N)$.

15. Уравнение. Множество решений уравнения. График уравнения с двумя переменными. Равносильные уравнения.

16. Неравенства. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства.

17. Системы уравнений и неравенств. Решение системы. Множество решений системы. Равносильные системы уравнений.

18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20. Преобразование в произведения сумм $\sin\alpha\pm\sin\beta$, $\cos\alpha\pm\pm\cos\beta$.

21*. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22*. Производные функций $y=a^x$, $y=\log_a x$. Правило нахождения производной сложной функции.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые, направление.

2. Перемещения. Виды перемещений. Осевая и центральная симметрии. Параллельный перенос. Поворот.

3*. Векторы. Операции над векторами. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.

4. Выпуклые фигуры. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Оси и центры симметрии многоугольников.

5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника.

6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8. Центральные и вписанные углы.

9. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

10. Площадь многоугольника. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

11. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

12. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

13. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

14. Параллельность прямой и плоскости.

15. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

16. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

17. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамида. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипед. Прямоугольный параллелепипед. Куб.

18. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

19. Площадь поверхности и объем многогранников и фигур вращения.

20. Формулы площади поверхности и объема призмы.

21. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

22. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

23. Формулы площади поверхности и объема конуса.

24. Формула объема шара.

25. Формула площади сферы.

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.
2. Свойства функции $y=k/x$ и ее график.
3. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Теорема Виета (прямая и обратная).
6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
7. Свойства числовых неравенств.
8. Логарифм произведения, степени, частного.
9. Определение и свойства функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ их графики.
10. Определение и свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.
11. Решение уравнений вида

$$\sin x=a,\ \cos x=a,\ \operatorname{tg} x=a.$$

12. Формулы приведения.
13. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
14. Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов.
15. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента.

16*. Производная суммы двух функций.

17*. Производная произведения двух функций.

18*. Производная частного двух функций.

19*. Производные функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=x^p$ $(p \in P)$.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойство точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Свойства средних линий треугольника и трапеции.
6. Центр симметрии параллелограмма.
7. Признаки параллелограмма.
8. Свойство серединного перпендикуляра к стороне прямоугольника.
9. Существование окружности, описанной около треугольника.
10. Существование окружности, вписанной в треугольник.
11. Свойство касательной к окружности.
12. Измерение угла, вписанного в окружность.
13. Признаки подобия треугольников.
14. Теорема Пифагора.
15. Теорема косинусов.
16. Теорема синусов.
17. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
18. Признак параллельности прямой и плоскости.
19. Признак параллельности плоскостей.

20*. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

21. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
22. Теорема о трех перпендикулярах.
23. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

Экзаменующийся должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений, производить приближенную прикидку результата; пользоваться таблицами для производства вычислений.
2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.
3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций.
4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы

уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

7. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.

8*. Проводить операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9*. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций.

Раздел I

§ 1

1. 24. Решение. Пусть x — число десятков искомого числа. Тогда искомое число можно записать в виде $10x+y$. В этих предположениях задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=6, \\ 10x+y+18=10y+x, \end{cases}$$

решая которую, получаем $x=2$, $y=4$.

2. 45. Решение. Запишем искомое число в виде $10x+y$, где x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц десятичной записи числа. Условие задачи запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} (10x+y)(x+y)=405, \\ (10y+x)(x+y)=486, \end{cases}$$

откуда $(10x+y)/(10y+x)=5/6$, или $x=4y/5$. Подставив это x в первое уравнение системы, получим $y^2=25$, $y=5$ ($y=-5$ не удовлетворяет условию задачи). Далее находим $x=4$.

3. 8,5; 10; 11,5. **4.** 3; 12. **5.** 49; 1. **6.** 6; 54. **7.** 24. **8.** 63.

9. 24. Решение. Искомое число запишем в виде $10x+y$, где x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц десятичной записи числа. По условию задачи

$$\begin{cases} 10x+y=3xy, \\ 10x+y+18=10y+x. \end{cases}$$

Решив систему уравнений и отбросив постороннее решение ($x=-1/3$; $y=5/3$), получим 24.

10. 32. **11.** 27.

12. 64. Указание. Пусть x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц искомого числа. По условию задачи

$$\begin{cases} 10x+y=x^2+y^2+12, \\ 10x+y=2xy+16. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение системы, получаем $(x-y)^2=4$, откуда $x-y=2$ и $x-y=-2$. Решая каждое из этих уравнений совместно, например, со вторым уравнением системы и отбрасывая посторонние решения, получим $x=6$, $y=4$.

13. 13; 31. Решение. Запишем искомое число в виде $10x+y$, где x, $y \in N$. По условию задачи

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ (10x+y)(10y+x)=403. \end{cases}$$

Второе уравнение системы можно переписать, учитывая первое уравнение, в виде $xy=3$. Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=16, \\ xy=3. \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна двум системам

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решения 1) $x=1$, $y=3$ и 2) $x=3$, $y=1$. Вторая система имеет решения 3) $x=-1$, $y=-3$ и 4) $x=-3$, $y=-1$. В множестве целых неотрицательных чисел решениями будут лишь решения первой системы.

14. 23. Указание. Запишем искомое число в виде $10x+y$, где x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц. По условию задачи

$$\begin{cases} 10x+y=4(x+y)+3, \\ 10x+y=3xy+5. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x=2$, $y=3$.

15. 91. **16.** 64. **17.** 72. **18.** 71. **19.** 32. **20.** 15; 95. **21.** 7; 8. **22.** Знаменатель дроби равен 9. **23.** 3/5. **24.** 4/15. Указание. Искомую дробь запишем в виде $n/(n^2-1)$, где n — целое число, $n \neq 0$. По условию задачи

$$\begin{cases} \dfrac{n+2}{n^2+1} > \dfrac{1}{3}, \\ 0 < \dfrac{n-3}{n^2-4} < \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств и учитывая, что n — целое число, $n \neq 0$, получаем $n=4$.

25. 13; 63. Указание. Пусть x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц. По условию задачи $10x+y=x^2+xy+y^2$, $10(x+5)+y=$ $=(x+5)^2+(x+5)y+y^2$, или

$$\begin{cases} 10x+y=x^2+xy+y^2, \\ 25-4y=x^2+xy+y^2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений и отбрасывая посторонние решения, получаем $x=1$, $y=3$.

26. 1210. Решение. Число можно записать в виде $4n+1$, где $n=3, 4, 5, \ldots, 24$ (всего таких чисел 22). Эти числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 13, а последний равен 97. Сумма всех чисел $S=\dfrac{13+97}{2}\cdot 22=110\cdot 11=1210$.

27. 99270. **28.** 676. **29.** 49500. **30.** 45; 54.

31. (7; 2), (9; 6), (23; 22). Решение. Пусть n и m — искомые натуральные числа. По условию задачи $n^2-m^2=45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, или

$$(n-m)(n+m)=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5. \qquad (1)$$

Так как n и m — натуральные числа, $n+m>0$, правая часть равенства — число положительное, то $n-m$ — число натуральное, при этом $n+m>n-m$, $n-m$ и $n+m$ являются делителями правой части равенства (1). Учитывая сказанное, для определения n и m получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} n-m=1, \\ n+m=45, \end{cases} \quad \begin{cases} n-m=3, \\ n+m=15, \end{cases} \quad \begin{cases} n-m=5, \\ n+m=9. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим пары чисел (23; 22), (9; 6), (7; 2).

32. 156. **33.** 34; 51. **34.** 5 и 105; 15 и 35.

35. 144 и 864. Решение. Пусть x и y — искомые числа. По условию $x/y=6k$, где $k \in N$. Так как x и y трехзначные числа, то равенство $x/y=6k$ возможно лишь при $k=1$ и, таким образом, $x=6y$. Далее, по условию, $x+y=504m$, где $m \in N$, при этом m может принимать лишь значения 1, 2, 3, так как $504m < 2000$. Решая систему уравнений $x+y=504m$, $x=6y$, получаем $y=72m$. При $m=1$: $y=72$, $x=432$ не удовлетворяют условию задачи; при $m=2$: $y=144$, $x=864$ — решение задачи; при $m=3$: $y=216$, $x=1296$ не удовлетворяют условию задачи.

36. $19=3^3-2^3$. Указание. Разложив левую часть равенства $m^3-n^3=19$ на множители и воспользовавшись тем, что 19 простое число, можно доказать, что такое представление единственно.

37. $\left(2;\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{9}\right)$, $\left(1/\sqrt[3]{2};\ -\sqrt[3]{9/2};\ \sqrt[3]{3/2}\right)$. Указание. Пусть x, y, z — искомые числа. По условию задачи $x^3=xyz+2$, $y^3=xyz-3$, $z^3=xyz+3$. Перемножив левые и правые части этих равенств и обозначив xyz через t, для определения t получаем уравнение $2t^2-9t-18=0$.

38. 52. Решение. Запишем искомое число в виде $10x+y$, где x — цифра в разряде десятков, y — цифра в разряде единиц. По условию задачи

$$x+y\geqslant 7, \qquad (1)$$
$$x^2+y^2\leqslant 30, \qquad (2)$$
$$10x+y\geqslant 2(10y+x),$$

или

$$8x\geqslant 19y. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что y может принимать значения 0, 1, 2, 3 (так как $x\leqslant 9$). Если $y=0$, то из (1) следует $x\geqslant 7$. Эти числа не удовлетворяют неравенству (2). Если $y=1$, то из (1) следует, что $x\geqslant 6$. Эти числа не удовлетворяют неравенству (2). Если $y=2$, то $x\geqslant 5$. Числа $x=5$, $y=2$ удовлетворяют всем неравенствам. При $y=2$, $x>5$ неравенство (2) не выполняется. Пусть $y=3$. Из (3) следует $x\geqslant 8$. Такие числа не удовлетворяют неравенству (2). Таким образом, больше решений нет.

39. 2573. Решение. Запишем искомое число в виде $1000x+100y+10z+t$, где x, y, z, t цифры в разрядах тысяч, сотен, десятков и единиц соответственно, причем $x\neq 0$. По условию задачи

$$\begin{cases} x+y+z=14,\\ y+z+t=15,\\ z=t+4,\end{cases}$$

поэтому $t=x+1$, $z=x+5$, $y=9-2x$. По условию задачи нужно найти такие значения x, y, z, t, чтобы $x^2+y^2+z^2+t^2=x^2+(x+1)^2+(x+5)^2+(9-2x)^2=f(x)$ принимало наименьшее значение. Так как $z\leqslant 9$, то из равенства $z=x+5$ следует, что x может принять лишь значения 1, 2, 3, 4. Вычисляя $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ и сравнивая их, получаем $f(2)<f(1)$, $f(2)<f(3)$, $f(2)<f(4)$. Поэтому $x=2$, $y=5$, $z=7$, $t=3$.

40. 1738. **41.** Доказательство. Пусть $a=n^2+(n+m)^2$, где n, m — натуральные числа. Тогда $2a=2n^2+2(n^2+2mn+m^2)=(2n+m)^2+m^2$. **42.** 300. **43.** $\left\{\frac{25}{9};\ \frac{26}{10};\ \frac{27}{11};\ \frac{28}{12};\ \frac{29}{13};\ \frac{30}{14}\right\}$. **44.** 18.

1. 113/15. 2. 2111/990. 3. 1. 4. $x=30$. 5. 8. 6. 6. 7. 7. 8. 1.

9. 0. Решение. $1+\sec 20°-\sqrt{3}\operatorname{ctg} 40°=\sec 20°+\frac{\sin 40°-\sqrt{3}\cos 40°}{\sin 40°}=$
$=\sec 20°-\frac{2(\sin 60°\cdot\cos 40°-\cos 60°\sin 40°)}{2\sin 20°\cos 20°}=\sec 20°-\frac{\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°}=$
$=\sec 20°-\sec 20°=0$.

10. 100. 11. 1. 12. 1/4. 13. $-3/2$. 14. 1. 15. 1. 16. 0. 17. 2. 18. $\sqrt{6}/2$. 19. $\sqrt{3}$. 20. 10. 21. $\sqrt{2}/2$. 22. 1. 23. 3/2. 24. 1. 25. 5. 26. $-9\sqrt{2}$. 27. 10. 28. 4. 29. 1. Указание. Преобразуйте заданное выражение к виду $a-b$. 30. 0. 31. -10. Указание. Если $a\in\mathbb{Z}$, то $a^2\in\mathbb{Z}$. 32. $(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$.

33. $\frac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}}$.

34. $a<b$. 35. Доказательство. Так как $b<c$, то
$$2b<b+c. \qquad (1)$$
Так как
$$b+c<a+1, \qquad (2)$$
то по закону транзитивности из (1) и (2) следует
$$2b<a+1. \qquad (3)$$
Так как $1<a$, то
$$1+a<2a. \qquad (4)$$
По закону транзитивности из (3) и (4) следует $2b<2a$, т. е. $b<a$.

36. $\log_3 108>\log_5 375$. Решение.
$$\log_3 108=3+\log_3 4>4; \qquad (1)$$
$$\log_5 375=3+\log_5 3<4. \qquad (2)$$
Из (1) и (2) следует, что $\log_3 108>\log_5 375$. 37. 0; $\ln(7/5)$; $\sqrt{0{,}8}$; 0,9186. 38. 0,37; $\operatorname{tg} 33°$; 1; 65/63; 61/59; $\operatorname{tg}(-314°)$. Указание. $\operatorname{tg}(-314°)=\operatorname{tg} 46°=$
$=\frac{1+\operatorname{tg} 1°}{1-\operatorname{tg} 1°}=\frac{1+\operatorname{tg}(\pi/180)}{1-\operatorname{tg}(\pi/180)}>\frac{1+1/60}{1-1/60}=\frac{61}{59}$. 39. 0,02; 0,85; $-\cos 571°$; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{0{,}762}$; 1. 40. Указание. Докажите, что последние цифры десятичной записи чисел 53^{53} и 33^{33} равны 3. 41. $(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$.

42. $(1+n+n^2)(1-n+n^2)(1+\sqrt{3}n+n^2)(1-\sqrt{3}n+n^2)$.

43. $(1+x)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+x^2\right)\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+x^2\right)$. Решение. $1+x^5=$
$$=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)=(1+x)x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right)=$$
$$=(1+x)x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$
$$=(1+x)x^2\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=$$
$$=(1+x)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right).$$

44. $ab/(a+b)$. 45. 0. 46. $-a^4/(a^2+b^2)$. 47. $4(a-b)/ab$. 48. $2/(a+b)$. 49. $m-n$. 50. 1. 51. $\sqrt{2}$. 52. $1/2bc$. 53. $a(a-b-c)/2$. 54. 1. 55. -1.

56. $\frac{x^3(x^2-xy-y^2)}{y^4(x+y)}$. 57. $12/(a+2)$. 58. $-3a/(a-1)$. 59. $2a+3$. 60. $\sqrt{2}$.
61. ab. 62. $(a-b)/(a+b)$. 63. $1/a$. 64. $a^{-169/60}\,b^{-31/30}$. 65. $1/\sqrt[3]{a^2b}$. 66. 1.
67. 1. 68. $2/(1-x)$. 69. 2. 70. $\sqrt{a}$. 71. $\sqrt{1-a}$. 72. 2. 73. $(x-1)\sqrt{x}$.
74. 1. 75. -1. 76. $2/(a-1)$. 77. 0. 78. 1. 79. $x-1$. 80. $2-3\sqrt{2}\,y^{1/5}+9y^{2/5}$.
81. $-2y$. 82. 1, если $a>0$ и $b>0$; -1, если $a<0$, $b<0$.
83. $\sqrt{bx}/(\sqrt{b}+\sqrt{x})$. 84. 1. 85. 1. 86. $2ab$. 87. $\sqrt{a^2-1}+a^2-1$.
88. 1/10. 89. $4/(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. 90. $(1-a)/\sqrt{a}$. 91. $\sqrt{a}/(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. 92. 1.
93. 1. 94. $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. 95. $-\sqrt{ab}$. 96. $1+\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$. 97. $1-\frac{2b}{3a}$. 98. $a(a+1)$.
99. $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. 100. $a+1$. 101. $a^{2/3}$. 102. $2b/\sqrt{a^2-b^2}$. 103. $1/a(a^{1/m}-b^{1/m})$.
104. $2/(1-a)$. 105. 0. 106. $\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}$. 107. 2. 108. -4. 109. a^2+ab+b^2.

110. $(x-a)/x$. Решение. $\frac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\left(\frac{x-(x^2-a^2)^{1/2}}{a^2(x+a)^{1/2}}\right)^{-1}=$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}\,(a+(x-a))}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a^2\sqrt{x+a}}=\frac{(x^2-(x^2-a^2))}{(x+a)\cdot x\cdot a^2}=\frac{1}{x^2+ax}.$$

После этого преобразования исходное выражение переписывается в виде
$\left(\frac{2}{x^2-a^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x^2+ax}+(x^2+ax)^{-1}\right)=$

$$=\frac{(x-a)(x+a)}{2}\cdot\left(\frac{1}{x(x+a)}+\frac{1}{x(x+a)}\right)=\frac{(x-a)(x+a)\cdot 2}{2x(x+a)}=\frac{x-a}{x}.$$

111. $\sqrt{a}/(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

112. $3\sqrt{b}$. Решение. $\left(\frac{2a+b^{1/2}a^{1/2}}{3a}\right)^{-1}\left(\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{a+\sqrt{ab}+b-a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}=\frac{3\sqrt{a}(2\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{b}}{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a}}=3\sqrt{b}.$$

113. 0. 114. 0. 115. 1, если $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; -1, если $a<0$, $b<0$, $a\neq b$. 116. a^2.

117. 3. Решение. $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+y\sqrt{y}+2x^2:\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}=$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3\sqrt{x}\,y-y\sqrt{y}+y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+3\sqrt{y}(x-\sqrt{xy}+y)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=\frac{3x\sqrt{x}+3y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=3.$$

118. $-\sqrt{x}$. 119. 1. 120. $(1+a^{2/3})^2/(1-a^{1/3})$. 121. $1/(1-x^2)$. 122. xy.
123. 1. 124. $3(\sqrt{a}-\sqrt{b})/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. 125. $\sqrt[4]{a}/(\sqrt{a}+1)$. 126. $2\sqrt[4]{b/a^2}$.

127. 1. **128.** $1/(x^2-1)$. **129.** $\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}$. **130.** 2. **131.** $\sqrt[4]{a}$, если $\sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{b}\geqslant 0$; $-\sqrt[4]{a}$, если $\sqrt[3]{b}>\sqrt[4]{a}\geqslant 0$.

132. $2/\sqrt{b^3}$. Решение. $\frac{b-b^{-2}}{b^{1/2}-b^{-1/2}}-\frac{1-b^{-2}}{\sqrt{b}+b^{-1/2}}-b^{1/2}=$

$$=\frac{b^3-1}{b\sqrt{b}\,(b-1)}-\frac{b^2-1}{b\sqrt{b}\,(b+1)}-\sqrt{b}=\frac{b^2+b+1}{b\sqrt{b}}-\frac{b-1}{b\sqrt{b}}-\sqrt{b}=$$

$$=\frac{b^2+2-b^2}{b\sqrt{b}}=\frac{2}{b\sqrt{b}}.$$

133. $2(a+4)/a$. **134.** 2. **135.** 1. **136.** $\sqrt{a}+\sqrt{5}$. **137.** 1. **138.** $-3/2$. **139.** $\sqrt[4]{b}$. **140.** $1/\sqrt[3]{a}$. **141.** $-\sqrt[4]{a^2b}$. **142.** $(a+1)/4$. **143.** $x^{1/3}$. **144.** $\sqrt[4]{a}+\sqrt{5}$. **145.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$. **146.** 3. **147.** $\sqrt[3]{x^2}$. **148.** $\sqrt{ab}$. **149.** -25, если $a>0$, $|a|>|b|>0$; 25, если $a<0$, $|a|>|b|>0$. **150.** 1. **151.** $6-4a$ при $a\in[0;\ \sqrt{2}]$; $2(a-1)^2$ при $a\in]\sqrt{2};\ +\infty[$. **152.** -1. **153.** 1.

154. $\sqrt{1-x^2}$. Решение. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\times$

$$\times\frac{x^2-1}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}+\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}-1)}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1-x^2})^2}\,\frac{x^2-1}{2}+1=$$

$$=-\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2}+1=-1+\sqrt{1-x^2}+1=\sqrt{1-x^2}.$$

155. $a+b$. **156.** $1/n$. **157.** $-2b$. **158.** 1) $2b(a-b)$; 2) $2b(a-b)$. **159.** $\sqrt[6]{2}$, если $|a|<1$; $-\sqrt[6]{2}$, если $1<|a|\leqslant\sqrt{2}$. **160.** $1+\sqrt{bc}$. **161.** $1/ab\sqrt[5]{a^3}$. **162.** $-2/(a+\sqrt{a})$; $(\sqrt{5}-5)/10$. **163.** a^2+ab+b^2; 2,52. **164.** $a(b-a)/(a+b)$; 15/4. **165.** $f(x,\ y)=y+\sqrt{xy}$, $f(9;\ 0{,}04)=0{,}64$. **167.** $D(y)=]-4;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$; $y=-4$.

168. Доказательство. $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{3/2}=a.$$

Отсюда следует $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

169. n^2/m^2. **170.** Область определения: $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; $A=0$ при $a>b$; $A=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ при $a<b$.

§ 3

2. Доказательство. 1) Проверим справедливость предложения при $n=1$: $4^1+15\cdot 1-1=18=9\cdot 2$, следовательно, $A(1)$ истинно. 2) Допустим, что при $n=k$, где k — натуральное число,

$$4^k+15k-1=9m, \qquad (1)$$

где m — натуральное число, т. е. $A(k)$ истинно. При $n=k+1$, учитывая (1) имеем

$$4^{k+1}+15(k+1)-1=4\cdot 4^k+60k-4-(45k-18)=4(4^k+15k-1)-9(5k-2)=$$
$$=4\cdot 9m-9(5k-2)=9\cdot(4m-5k+2)=9p,$$

где $p=4m-5k+2$ — число натуральное. Обе части доказательства проведены, поэтому на основании принципа математической индукции предложение справедливо при всех натуральных n.

4. Замечание. Эта задача более просто решается без применения метода математической индукции. Разложим данное выражение на множители: $n^3-n=(n-1)n(n+1)$. По условию число n — нечетное; следовательно, $n-1$ и $n+1$ — четные числа; из двух последовательных четных чисел одно делится на 2, а другое на 4; кроме того, из трех последовательных целых чисел $n-1$, n, $n+1$ по крайней мере одно делится на 3. Таким образом, n^3-n делится на $2\cdot 4\cdot 3=24$.

6. Доказательство. 1) При $n=1$ предложение справедливо $1-\frac{4}{1}=$ $=\frac{1+2\cdot 1}{1-2\cdot 1}$, т. е. $-3=-3$.

2) Допустим, что при $n=k$, где $k\in N$, равенство имеет место, т. е.

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}. \qquad (1)$$

При $n=k+1$, учитывая (1), будем иметь

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\frac{(2k+1)^2-4}{(2k+1)^2}=$$
$$=\frac{(2k-1)(2k+3)}{(1-2k)(2k+1)}=\frac{1+2(k+1)}{-1-2k}=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}.$$

Обе части доказательства проведены, поэтому на основании принципа математической индукции предложение справедливо при всех $n\in N$. Замечание. Доказательство можно провести и не прибегая к принципу математической индукции. Действительно, для любого $k\in N$ имеем

$$1-\frac{4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-1)^2-4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-3)(2k+1)}{(2k-1)^2}, \qquad (2)$$

поэтому, давая k в формуле (2) значения $1, 2, \ldots, n$ и перемножая результаты, получим

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=$$
$$=\frac{(-1\cdot 3)(1\cdot 5)(3\cdot 7)\ldots((2n-3)(2n+1))}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-1)^2}=$$
$$=\frac{-1\cdot 1\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-3)^2\cdot(2n-1)(2n+1)}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-1)^2}=\frac{-1\cdot(2n+1)}{2n-1}=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

11. $x=4$. **12.** $x=11$. **13.** $x=5$. **14.** $x=7$. **15.** $x=8$. **16.** $x=4$. **17.** $x=5$. **18.** $x=10$. **19.** $x=8$. **20.** $x=9$. **21.** $x=3$. **22.** $n=6$, $m=3$.

23. $x=7$. Указание. Решая задачу, получаем уравнение $(x+3)(x+2)(x+1)=720$. На множестве натуральных чисел функция $f(x)=$

$=(x+3)(x+2)(x+1)$ возрастающая. Натуральный корень полученного уравнения легко найти подбором.

24. $x=3$. Указание. Решая задачу, получаем уравнение $6(x+3)-x(x+1)=\frac{120}{x+2}$, $x\in N$. Так как правая часть уравнения при $x\in N$ положительна, то $6(x+3)-x(x+1)\in N$, $6(x+3)-(x+1)x>0$, следовательно, $1\leqslant x<8$, $x\in N$, причем 120 должно делиться на $x+2$ без остатка, поэтому $x\neq 5$, $x\neq 7$. Поэтому корни полученного уравнения нужно искать среди чисел: 1, 2, 3, 4, 6.

25. 13. **26.** 10. **27.** $(n+2)2^{n-1}$. Решение. Обозначим данное выражение через S:

$$S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n; \qquad (1)$$

учитывая, что $C_n^k=C_n^{n-k}$, выражение (1) запишем в виде

$$S=(n+1)C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\ldots+2C_n^{n-1}+C_n^n. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), имеем

$$2S=(n+2)\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n\right)=(n+2)\,2^n,$$

откуда следует $S=(n+2)2^{n-1}$.

28. $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. **29.** $\{11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18\}$. **30.** $\{6; 7; 8; 9\}$. **31.** $n>14$, $n\in N$. **32.** $\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$.

33. $x\geqslant 2$, $x\in N$. Решение. Так как $C_{x+1}^{x-1}=C_{x+1}^2=\frac{(x+1)x}{2}$, то данное неравенство имеет вид $\frac{(x+1)x}{2}>\frac{3}{2}$, или $x^2+x-3>0$, т. е. $x\in\,]-\infty;-(\sqrt{13}+1)/2[\,\cup\,](\sqrt{13}-1)/2;+\infty[$, но по условию задачи $x\in N$, следовательно, $x\geqslant 2$ — целое число.

34. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. **35.** $\{12;\ 13;\ 14;\ \ldots\}$. **36.** $\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. **37.** $\{8;\ 9;\ 10;\ \ldots\}$. **38.** Три. **39.** Четыре. **40.** $x_1=-63/4$; $x_2=-23/8$. **41.** mnk.

42. $2\cdot(P_5)^2=2\cdot(120)^2$ способами. Решение. Существует только один способ рассадить девочек и мальчиков — через одного. При этом девочек можно посадить P_5 способами и мальчиков — P_5 способами. Кроме того, мальчиков и девочек можно поменять местами. Поэтому всего будет $2\cdot(P_5)^2$ способов.

43. $2\cdot(P_6)^2=2\cdot 720^2$ способами. **44.** $A_{10}^3=720$ способами. **45.** а) $A_{40}^2=$ $=40\cdot 39=1560$; б) $40\,C_{39}^4$. **46.** $C_9^5=126$ способов. **47.** C_{n+k-1}^{k-1} способами.

48. 26250 вариантов. Указание. Либо в какой-то урне 3 шара и в 9 урнах — по 1 шару, либо в каких-то двух урнах по 2 шара и в 8 урнах — по 1 шару.

49. $(C_8^3-6)\,P_3P_5=36000$ способов. **50.** 2187 способами. **51.** 31. **52.** $A_3^2\cdot A_5^4=$ $=720$. **53.** 125. **54.** 5274. **55.** $A_9^5=15120$. **56.** 576.

57. $45\cdot 10^5$. Решение. Рассмотрим 10 последовательных семизначных чисел

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_60,$$
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_61,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_69,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 — какие-то цифры. Как видим, из этих 10 чисел половина, т. е. 5 имеет четную сумму цифр. Первая цифра a_1 может принимать 9 различных значений; каждая из цифр a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 может принимать

10 различных значений; последняя цифра a_7 может принимать лишь 5 различных значений, при которых сумма всех цифр будет четная. Итак, существует $9\cdot 10^5\cdot 5=45\cdot 10^5$ семизначных чисел, сумма цифр которых четная.

58. $4\cdot 7^3=1372$. Решение. По условию задачи в записи четырехзначного числа обязательно встречается цифра 1 и притом только один раз. Остальные три цифры могут принимать любое из 7 значений 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Заданная цифра 1 может стоять на 1-м, 2-м, 3-м или 4-м месте. Следовательно, всего чисел, удовлетворяющих условиям задачи, будет $4\cdot 7\cdot 7\cdot 7=4\cdot 7^3=1372$.

59. $C_7^2\cdot 2^5=672$.

60. $C_9^4\,(C_6^3P_3\cdot 4+C_4^2C_6^2C_4^2P_2)+C_9^3(C_5^3P_3+5\cdot 3C_5^3P_2+C_5^2\cdot 3C_4^2P_2+5\cdot 3C_5^2C_3^2)=$ $=294840$ чисел. Указание. Либо среди цифр нет нуля, либо есть. В первом случае либо какая-то цифра стоит на трех местах, либо имеется два «дублера». Во втором случае одно из четырех: либо нуль занимает три места, либо какая-то другая цифра занимает три места, либо нуль занимает одно место и есть два «дублера», либо нуль занимает два места и есть один «дублер».

61. 4373. Итак, искомыми будут числа 12, 21, ..., 199999992. Для удобства счета мы все их будем считать девятизначными и обозначать

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9,$$

дописывая нужное количество нулей впереди данного числа. Запишем три последовательных девятизначных числа

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_80,$$
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_81,$$
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_82,$$

где a_1 может принимать одно из двух значений 0 или 1, каждая из цифр a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 может принимать любое из трех значений 0, 1, 2. Из этих чисел надо потом исключить число, для которого $0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=$ $=a_6=a_7=a_8=a_9$. Для того чтобы допустимое условиями задачи девятизначное число делилось на 3, сумма его цифр $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$ должна делится на 3. Сумма первых восьми цифр может быть равна или $3n-2$, или $3n-1$, или $3n$. В каждом случае a_9 можно выбрать из 0, 1, 2 лишь единственным образом, чтобы сумма всех девяти цифр была $3n$. Итак, всего чисел, удовлетворяющих условиям задачи, будет $2\cdot 3^7\cdot 1-1=4374-1=4373$.

62. 576. Решение. Условию задачи удовлетворяет случай, когда четырехзначное число записано при помощи одной цифры, таких чисел C_9^1, так как 0 не может быть этой цифрой. Условию задачи удовлетворяет также случай, когда четырехзначное число записано при помощи двух различных цифр. Предположим, что одна из них 0, тогда другую можно выбрать $C_9^1=9$ способами. На первом месте нуль стоять не может, это место занимает вторая выбранная цифра; следовательно, если в записи числа 0 встречается только один раз, то таких чисел C_3^1, если в записи числа 0 встречается два раза, то таких чисел C_3^2 и, наконец, если 0 встречается три раза, то таких чисел C_3^3. Итак, чисел, удовлетворяющих условию задачи, и в записи которых встречается хотя бы один нуль, $C_9^1(C_3^1+C_3^2+C_3^3)=9\cdot(3+3+1)=63$. Последняя возможность: число записано двумя различными цифрами, среди которых нет 0. Две цифры из 9 можно выбрать C_9^2 способами. Если цифры уже выбраны, то при записи числа 1-я цифра может встретиться 1 раз, а 2-я — 3 раза, таких

чисел C_4^1; 1-я цифра может встретиться 2 раза и 2-я также 2 раза, таких чисел C_4^2; наконец, 1-я цифра может встретиться 3 раза, а 2-я — 1 раз, таких чисел C_4^3. Следовательно, всего различных четырехзначных чисел, записанных только двумя различными числами, среди которых нет 0, будет $C_9^2(C_4^1+C_4^2+$ $+C_4^3)=36\cdot(4+6+4)=36\cdot 14=504$. Итак, условию задачи удовлетворяет

$$C_9^1+C_9^1(C_3^1+C_3^2+C_3^3)+C_9^2(C_4^1+C_4^2+C_4^3)=9+63+506=576$$

чисел.

63. 261972. Решение. Букет может быть составлен из 3, 4, ..., 18 различных цветов. Это можно сделать $A=C_{18}^3+C_{18}^4+\ldots+C_{18}^{18}$ различными способами. Учитывая, что $C_{18}^0+C_{18}^1+C_{18}^2+C_{18}^3+\ldots+C_{18}^{18}=2^{18}$, т. е.

$$1+18+153+A=262144,$$

получим $A=262144-172=261972$.

64. 766. Решение. Итак, искомые числа 1, 2, 11, 12, 21, 22, ..., 122222222. Подсчитаем их число. Одновначных чисел, записанных цифрами 1, 2, будет $C_2^1=2$. Двузначных чисел, записанных двумя цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2C_2^1=2+1\cdot 2=4$. Трехзначных чисел, записанных двумя цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2(C_3^1+C_3^2)=2+1\cdot(3+3)=8$. Четырехзначных чисел, записанных двумя цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2(C_4^1+C_4^2+C_4^3)=C_2^1+(2^4-C_4^0-C_4^4)=$ $=2+2^4-2=2^4=16$. Пятизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2(C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4)=2+(2^5-C_5^0-C_5^5)=2+2^5-2=2^5=32$. Шестизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2(C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5)=$ $=2^6=64$. Семизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, будет $C_2^1+C_2^2(C_7^1+$ $+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6)=2^7=128$. Восьмизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, будет $2^8=256$. Так как все искомые числа меньше $2\cdot 10^8$, то все девятизначные числа начинаются с 1, и, следовательно, их столько же, сколько и восьмизначных, т. е. 256. Итак, всего чисел, меньших $2\cdot 10^8$ и записанных двумя цифрами 1, 2, будет $2+4+8+16+32+64+128+256+256=766$.

65. $$(C_5^1\cdot C_6^3+C_5^2\cdot C_6^3\cdot C_3^1+C_5^3\cdot C_6^3\cdot C_3^1\cdot C_2^1)(C_4^1+C_4^2\cdot C_3^1+C_4^3\cdot C_3^1\cdot C_2^1)+$$
$$+(C_5^1\cdot C_5^2+C_5^2\cdot C_5^2\cdot C_3^1+C_5^3\cdot C_5^2\cdot C_3^1\cdot C_2^1)(C_1^1+C_4^1\cdot C_3^1+C_4^1\cdot C_3^2+C_4^2\cdot C_3^1\cdot C_2^1)+$$
$$+(C_5^1C_5^3+C_5^2C_5^3C_3^1+C_5^3C_5^3C_3^1C_2^1)(C_4^1+C_4^1C_2^1+C_4^2C_2^1C_2^1)=$$
$=1900\cdot 46+950\cdot 61+950\cdot 36=87\,400+57950+3420=179\,550$. Указание. При выборе трех нечетных цифр возможны случаи: I) все три выбранные нечетные цифры одинаковы, II) две выбранные нечетные цифры одинаковы, а третья от них отлична, III) все три выбранные нечетные цифры различны. При выборе трех четных цифр надо различать две возможности: 1) среди четных цифр нет 0, 2) среди четных цифр есть 0. Случай 1) подразделяется на три возможных подслучая: а) все три выбранные четные цифры одинаковы, б) две выбранные четные цифры одинаковы, а третья от них отлична, 3) все три выбранные четные числа различны. Случай 2) подразделяется на четыре подслучая: г) все три выбранные четные цифры есть 0, д) две выбранные четные цифры есть 0, а третья четная цифра отлична от 0, е) одна выбранная четная цифра есть 0, а две других четные цифры одинаковы и отличны от 0, ж) одна из выбранных четных цифр есть 0, а две другие — различные четные цифры, отличные от 0. Каждый из случаев I, II, III может сочетаться с каждым из случаев а), б), в), г), д), е),

ж), причем в случаях а), б), в) нечетные цифры можно помещать на любые из 6 мест шестизначного числа, а в случаях г), д), е), ж) либо одну из нечетных цифр надо поместить в начале, а две другие на любое из оставшихся 5 мест, либо одну отличную от нуля четную цифру поместить в начале, а остальные размещать произвольно.

66. 840. **67.** $45\cdot 10^4$. Указание. См. решение задачи **50.** Всего шестизначных чисел с четной суммой цифр и нечетной суммой цифр равное количество. Всего же шестизначных чисел $9\cdot 10^5$.

68. 13 участников, 156 партий.

69. $C_{12}^6=924$. **70.** $20x^{-3/2}$.

71. $n=11$. Решение. $C_n^2-C_n^1=44$, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}-n=44$, откуда $n_1=11$, $n_2=-8$. Условию задачи удовлетворяет $n=11$.

72. $T_4=70$. Решение. Искомый член разложения $T_k=C_8^k x^{8-k}(1/x)^k$; $x^{8-k}x^{-k}=x^0$, откуда $8-2k=0$, $k=4$. $T_4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$.

73. $T_8=C_{17}^8$.

74. $T_4=35x^2$. Решение. Искомый член разложения $T_k=C_7^k(x^{-2/3})^{7-k}x^k=C_7^k x^2$, откуда $\frac{2k-14}{3}+k=2$, $k=4$; $T_4=C_7^4x^2=35x^2$.

75. $T_1=14a^{7/2}$.

76. $T_3=165z^{14}$. Решение. $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n=2048=2^{11}$, $n=11$; $T_3=C_{11}^3(z^2)^8(z^{-2/3})^3=165z^{14}$.

77. $x=9$. Решение. $\frac{C_x^6(2^{1/3})^{x-6}(3^{-1/3})^6}{C_x^{x-6}(2^{1/3})^6(3^{-1/3})^{x-6}}=\frac{1}{6}$, или $6^{-4}\cdot 6^{x/3}=6^{-1}$, откуда $x=9$.

78. Шестой. **79.** Третий. **80.** $T_6=5005$.

81. $n=32$. Решение. $C_n^2\cdot\frac{1}{16}=31$, $\frac{n(n-1)}{32}=31$, $n_1=32$, $n_2=-31$. Условию задачи удовлетворяет $n=32$.

82. $T_4=1120x^4$. Решение. $C_m^0-2C_m^1+4C_m^2=97$, $1-2m+2m(m-1)=97$, $m_1=8$, $m_2=-6$. Условию удовлетворяет $m=8$. Далее $2(8-k)-k=4$, откуда $k=4$, $T_4=C_8^4(x^2)^4(-2/x)^4=1120x^4$.

83. 380.

84. $x_1=-1$, $x_2=2$. Решение. $C_m^{m-2}+C_m^{m-1}+C_m^m=\frac{m(m-1)}{2}+m+1=22$, $m=6$. $T_2+T_4=135$, или $30\cdot 2^x+60\cdot 2^{-x}=135$, $x_1=-1$, $x_2=2$.

85. $x_1=10^{-4}$, $x_2=10$. Решение. $T_3=C_6^3x^{3/2(\lg x+1)}\cdot x^{1/4}=200$, $20x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2(\lg x+1)}}=200$, $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2(\lg x+1)}\right)\lg x=1$; $\lg x=-4$, $\lg x=1$; $x_1=10^{-4}$, $x_2=10$.

86. $x=-1/3$.

87. $x=1$. Решение. $m(m-1)/2-20=m$, $m^2-3m-40=0$, $m_1=8$, $m_2=-5$. Условию задачи удовлетворяет $m=8$.Далее, $T_3-T_5=56$, или $56(2^x-2\cdot 2^{-x})=56$, или $2^{2x}-2^x-2=0$; $2^{x_1}=2, x_1=1$; $2^{x_2}=-1$, $x_2\in\varnothing$.

88. $x_1=10^{-5/2}$, $x_2=10$. Решение. $T_2=C_5^2x^3x^{2\lg x}=10^6$, $x^3x^{2\lg x}=10^5$;

$(2\lg x+3)\lg x=5$, $2\lg^2 x+3\lg x-5=0$; $\lg x=-5/2$, $x_1=10^{-5/2}$; $\lg x=1$, $x_2=10$.

89. $x_1=1$, $x_2=2$. Решение. Шестое слагаемое разложения степени бинома является пятым членом бинома

$$T_5=C_7^5 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}}\cdot 2^{-\log_2(3^{x-1}+1)}=84,$$

$$\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 2^{\log_2(9^{x-1}+7)}\cdot 2^{-\log_2(3^{x-1}+1)}=84,$$

$$\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}=4, \qquad (3^{x-1})^2-4\cdot 3^{x-1}+3=0,$$

$$(3^{x-1}-1)(3^{x-1}-3)=0;\ 3^{x-1}=1,\ x_1=1;\ 3^{x-1}=3;\ x_2=2.$$

90. Указание. Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$. Докажите, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

91. $n=13$. Указание. Так как $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n=\frac{1}{5^n}(x+2)^n$, то задачу следует решить для $(x+2)^n$.

92. Максимальным по модулю является $T_{18}=C_{50}^{18}b^{50}\cdot 3^{16}$. Решение. Отношение $\left|\frac{T_k}{T_{k-1}}\right|=\left(\frac{51}{k}-1\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$. Легко убедиться, что $|T_k/T_{k-1}|>1$ при $k\leqslant 18$ и $|T_k/T_{k+1}|>1$ при $k\geqslant 18$. Следовательно, $k=18$ и T_{18} будет наибольшим по модулю членом разложения.

93. $n=6$; $x=\pm 1/2$. **94.** $(x^{1/3}-x^{-1/2})^{10}$, $T_4=C_{10}^4$. **95.** $T_6=84$.

§ 4

1. $\{4/3\}$. **2.** $\{-9/2;\ 13/4\}$. **3.** Все $x\in[2;\ +\infty[$. Решение. Рассмотрим три случая: 1) $x\leqslant 0$; 2) $0<x<2$; 3) $x\geqslant 2$.

1-й случай: $x\leqslant 0$. В этом случае уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x\leqslant 0,\\ -x+(x-2)=2,\end{cases}$$

множество решений которой пусто.

2-й случай: $0<x<2$. В этом случае уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0<x<2,\\ x+(x-2)=2,\end{cases}$$

множество решений которого пусто.

3-й случай: $x\geqslant 2$. В этом случае уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x\geqslant 2,\\ x-(x-2)=2,\end{cases}$$

множеством решения которого являются все $x\in[2;\ +\infty[$.

4. $\{-1\}$.

5. $]-\infty;\ -3]\cup[-\sqrt{3}/3;\ 1/2]$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$|a^2x+1|+|a^3+a^2x|=a^2x+1-(a^3+a^2x).$$

Уравнение $|u|+|v|=u-v$ равносильно системе

$$\begin{cases} u\geqslant 0,\\ v\leqslant 0.\end{cases}$$

При $a\neq 0$ рассмотрите случаи $0<a<1$, $-1<a<0$, $a=-1$ и $a<-1$.

6. $]2;\ 3[$. Решение. Заданное неравенство равносильно неравенству $|2x-5|<1$, которое равносильно двойному неравенству $-1<2x-5<1$, или $4<2x<6$, или $2<x<3$.

7. $]-\infty;\ 1/6]\cup[3/2;\ +\infty[$. Указание. Заданное неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $3x-2{,}5\leqslant-2$ и $3x-2{,}5\geqslant2$.

8. $[1;\ +\infty[$. Указание. Рассмотрите три случая: 1) $x\geqslant2$; 2) $-4<x<2$; 3) $x\leqslant-4$. Неравенство можно также решить графически, построив графики функций $y=|x+4|$ и $y=|x-2|$.

9. $]5/3;\ 3[$. Указание. Заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 1-x<2x-4<x-1. \end{cases}$$

10. $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]\ 2;\ +\infty[$. Указание. Рассмотрите два случая: 1) $x<-1$; 2) $x\geqslant-1$.

11. $]\ 9/2;\ +\infty\ [$. Указание. Рассмотрите три случая: 1) $x\leqslant-2$; 2) $-2<x<1$; 3) $x\geqslant1$.

12. $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]5;\ +\infty[$, $x=6$. **13.** $x=-1$. **14.** $b=-50$.

15. $\{-4\}$. Решение. Заданное уравнение запишем в виде $|x|^2-2|x|-8=0$, или $(|x|-4)(|x|+2)=0$. Учитывая, что $|x|+2\neq0$, получаем $|x|=4$, откуда находим $x_1=-4$; $x_2=4$. В область определения функции $y=\sqrt{5-2x}$ входит лишь $x_1=-4$.

16. $\{-2;\ -1/9\}$. **17.** $\{1\}$. **18.** $\{-5/3\}$. Указание. При решении уравнения учтите, что $x^2=|x|^2$.

19. $\{-2;\ 1\}$. Решение. 1) Если $x^2+4x+2\geqslant0$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+4x+2\geqslant0, \\ 3x^2+7x-10=0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x=1$.

2) Если $x^2+4x+2<0$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+\ 4x+\ 2<0, \\ 3x^2+17x+22=0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x_2=-2$.

Графическое решение состоит в том, что построив графики функций $y=|x^2+4x+2|$ и $y=\dfrac{5x+16}{3}$, найдем координаты x_1 и x_2 точек пересечения этих графиков, которые и будут корнями заданного уравнения.

20. $\{1;\ 4\}$. **21.** $\{2;\ 5\}$. **22.** $\{3;\ 6\}$. **23.** $\{0;\ 1\}$. Решение. Рассмотрим два случая: 1) $x\geqslant1$, 2) $x<1$.

1-й случай. При $x\geqslant1$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x\geqslant1, \\ x^2+x-2=0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x_1=1$.

2-й случай. При $x<1$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x<1, \\ x^2-x=0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x_2=0$.

24. $\{-20{,}5;\ 10\}$. Указание. При упрощении уравнения учтите, что коэффициенты при x в квадратных трехчленах образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1, а свободные члены — арифметическую прогрессию с разностью, равной 2.

25. $\{2+\sqrt{4-a}\}$, если $a<-4$; $\{2-\sqrt{4+a};\ 2+\sqrt{4+a};\ 2+\sqrt{4-a}\}$, если $-4\leqslant a<0$; $\{0;\ 4\}$, если $a=0$; $\{2-\sqrt{4+a}\}$, если $a>0$. **26.** $a=20\pm 6\sqrt{5}$.

27. $k_1=-22/3$; $k_2=2$. **28.** $a=4$. **29.** При всех $m\in]\ 1/4;\ +\infty\ [$. **30.** При всех $m\in]-\infty;\ -1/2[\ \cup\ ]1/2;\ +\infty[$. **31.** При всех $m\in]-\infty;\ -1/7\ [\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. **32.** При всех $c\in]2;\ 4[$. **33.** $k=13$. **34.** $a=\pm 2$. **35.** $a=\pm 10$. **36.** $k=\pm 4$.

37. $28x^2-20x+1=0$. Решение. Запишем искомое уравнение в виде

$$x^2+px+q=0. \qquad (1)$$

Его корни

$$x_1=\frac{1}{10-\sqrt{72}}=\frac{10+\sqrt{72}}{28}=\frac{5+3\sqrt{2}}{14},$$

$$x_2=\frac{1}{10+6\sqrt{2}}=\frac{10-6\sqrt{2}}{28}=\frac{5-3\sqrt{2}}{14};$$

$$p=-(x_1+x_2)=-\frac{5}{7};\ q=\frac{5+3\sqrt{2}}{14}\cdot\frac{5-3\sqrt{2}}{14}=\frac{1}{28}.$$

Подставляя полученные значения p и q в уравнение (1), находим искомое уравнение.

38. $]-3;\ 5[$. **39.** $[0;\ 1/2[$. **40.** $k=3$. **41.** $k=3$. **42.** $a_1=-2$; $a_2=1$. **43.** При всех $a\in]-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty[$.

44. При всех $a\in]-6;\ 3[$. Указание. Нужно найти значения a, при которых уравнение $(a-6)x^2-2=2ax+1$ не имеет действительных корней.

45. $\{-4;\ -3;\ 3;\ 4\}$.

46. $a=-4$. Решение. По условию задачи корни x_1 и x_2 уравнения связаны равенством $x_2=2x_1$. Применяя теорему Виета для определения x_1, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_1=1-2a,\\ 2x_1^2=a^2+2,\end{cases}$$

из которой для определения a получаем уравнение $a^2+8a+16=0$. Отсюда $a=-4$.

47. $a_1=-3/2$; $a_2=6$. **48.** $a_1=2$; $a_2=9/2$. **49.** $\{2;\ 18\}$ при $a=6$; $\{2/19;\ 18/19\}$ при $a=-6/19$. **50.** $a_1=-125/8$; $a_2=27/8$. **51.** $p=\pm 7$. **52.** $k=\pm 3\sqrt{5}$. **53.** $a_1=3/2$; $a_2=3$. **54.** $b=-13$.

55. $p=0$. Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и теореме Виета

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=16,\\ x_1+x_2=4.\end{cases}$$

Возводя в квадрат второе уравнение системы и учитывая первое уравнение системы, получим $x_1x_2=0$ и $p=x_1x_2=0$.

56. $a=2$. Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Применяя теорему Виета для определения x_1 и x_2, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2=(a-1)/2,\\ x_1+x_2=(a+1)/2,\end{cases}$$

откуда $x_1=a/2$, $x_2=1/2$. Подставив в уравнение любой из полученных корней, получим значение a.

57. $a_1=1/2$; $a_2=1$. **58.** $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.

59. $a=-2$. Решение. Первое уравнение имеет действительные корни, если $a^2-4\geqslant 0$, т. е. если $a\in]-\infty;\ -2[\ \cup [2;\ +\infty[$. Второе уравнение имеет действительные корни, если $1-4a\geqslant 0$, т. е. если $a\in]-\infty;\ 1/4]$. Таким образом, данные уравнения могут иметь общий корень, если $a\in]-\infty;\ -2]$. Пусть x_0 — общий корень. Тогда будут верными числовые равенства

$$x_0^2+ax_0+1=0 \quad \text{и} \quad x_0^2+x_0+a=0. \qquad (1)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a-1)x_0+(1-a)=0$, или $x_0=(a-1)/(a-1)=1$ (в области $[-\infty;\ -2]$ деление на $a-1$ правомерно). Подставив x_0 в любое из равенств (1), находим $a=-2$.

60. $m=-2$. Решение. Найдем корни первого уравнения $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$, а также корни второго уравнения $x_3=\dfrac{1-\sqrt{1-12m}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+\sqrt{1-12m}}{2}$. Корни будут действительными при условии $m\leqslant 1/12$. Если $0<m\leqslant 1/12$, то $\sqrt{1-12m}<\sqrt{1-4m}<1$, и, следовательно, все четыре корня положительны, причем $(m\neq 0)$ $0<x_1<x_3<<x_4<x_2$. Отсюда видно, что $x_3\neq 2x_2$ и $x_4\neq 2x_2$. Надо исследовать две оставшиеся возможности: а) $x_3=2x_1$ или б) $x_4=2x_1$, т. е.

$$\frac{1\pm\sqrt{1-12m}}{2}=1-\sqrt{1-4m}\Rightarrow 1\pm\sqrt{1-12m}=2-2\sqrt{1-4m}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{1-4m}=1\mp\sqrt{1-12m}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(1-4m)=1\mp 2\sqrt{1-12m}+1-12m\Rightarrow 1-2m=\mp\sqrt{1-12m}.$$

В левой части равенства стоит $1-2m>0$, следовательно, и в правой части должно стоять положительное число, т. е. $+\sqrt{1-12m}$, т. е. возможность б) отпадает: $x_4\neq 2x_1$. Возведем правую и левую часть равенства $1-2m==\sqrt{1-12m}$ в квадрат; тогда получим после преобразований $m^2+2m=0$, откуда $m=-2$, так как $m\neq 0$, но мы рассматриваем случай $0<m<1/12$, т. е. пришли к противоречию и в случае а), т. е. $x_3\neq 2x_1$.

Рассмотрим случай $m<0$; тогда $1<\sqrt{1-4m}<\sqrt{1-12m}$ и, следовательно, $x_1<0$, $x_3<0$, $x_4>0$, $x_2>0$, причем $x_3<x_1<0<x_2<x_4$. Отсюда видно, что $x_3\neq 2x_2$ и $x_4\neq 2x_1$. Надо исследовать две оставшиеся возможности а) $x_4=2x_2$ и б) $x_3=2x_1$. Тогда

$$\frac{1\pm\sqrt{1-12m}}{2}=1\pm\sqrt{1-4m}\Rightarrow 1\pm\sqrt{1-12m}=2\pm 2\sqrt{1-4m}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pm\sqrt{1-12m}=1\pm 2\sqrt{1-4m}. \qquad (1)$$

В случае верхних знаков (это случай а)) возводим правую и левую части в квадрат: $1-12m=1+4\sqrt{1-4m}+4(1-4m)\Rightarrow m-1=\sqrt{1-4m}$. Здесь слева $m-1<0$, а справа $\sqrt{1-4m}>0$; пришли к противоречию. Следовательно, $x_4\neq 2x_2$. В случае нижних знаков в (1) (это случай б)) производим преобразование

$$2\sqrt{1-4m}=1+\sqrt{1-12m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(1-4m)=1+2\sqrt{1-12m}+1-12m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2m=\sqrt{1-12m}\Rightarrow 1-4m+4m^2=1-12m\Rightarrow m^2=-2m$$

и так как $m\neq 0$, то отсюда следует $m=-2$. Следовательно, $x_3=2x_1$ при $m=-2$.

61. $c<0$. Решение. Трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не имеет действительных корней, следовательно, $f(x)$ при любых $x\in R$ имеет один и тот же знак, но $f(1)=a+b+c<0$; следовательно, $0>f(0)=c$.

62. $x_1^3+x_2^3=3pq-p^3$. 63. $x_1^3+x_2^3=a(a^2-18a+9)/27$. 64. $215/27$.

65. $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=-\dfrac{27a^3+36a}{8}$. Решение. На основании теоремы Виета имеем $x_1+x_2=3a/2$, $x_1x_2=-1$; тогда

$$(x_1+x_2)^3=27a^3/8\Rightarrow x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=27a^3/8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_3^3=\frac{27a^3}{8}-3(-1)\cdot\frac{3a}{2}\Rightarrow x_1^3+x_2^3=\frac{27a^3+36a}{8}.$$

Вычислим $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=-\dfrac{27a^3+36a}{8}$.

66. При всех $a\in]2;\ 17/4[$. 67. При всех $p\in[3;\ 15/4]$. 68. При всех $a\in]-\infty;\ -6[$. 69. При всех $a\in]6;\ +\infty[$. 70. При всех $a\in]5/3;\ +\infty[$. 71. $k=5$.

72. $]-\infty;\ -(a+\sqrt{a^2-4a})/2[\ \cup\ ](\sqrt{a^2-4a}-a)/2;\ +\infty[$ при всех $a\in]-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty[$; $]-\infty;\ +\infty[$ при всех $a\in]0;\ 4[$.

73. При всех $m\in]1;\ +\infty[$. 74. При всех $a\in]11/9;\ +\infty[$. 75. $x^2-(a^2+1)x+4=0$. 76. $4x^2-8x-4a^2-11=0$. 77. При всех $a\in[1/2;\ +\infty[$. 78. При всех $a\in]0;\ 1[\cup]1;\ 6/5[$. 79. При всех $a\in]-1/2;\ 0[\cup]0;\ \sqrt{5}/5[$.

80. При всех $a\in]0;\ 1/3[$. Решение. Рассмотрим два возможных случая: 1) $3a\leqslant a+3$; 2) $3a>a+3$.

1) $3a\leqslant a+3\Rightarrow a\leqslant 3/2$. В этом случае заданное неравенство выполняется на интервале $]3a;\ a+3[$. Чтобы оно выполнялось при всех $x\in[1;\ 3]$, необходимо и достаточно, чтобы имела непустое множество решений система неравенств

$$\begin{cases}3a<1,\\ a+3>3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<1/3,\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<1/3.$$

Так как при этом $a<3/2$, то при всех $a\in]0;\ 1/3[$ задача имеет решение.

2) $3a>a+3\Rightarrow a>3/2$. В этом случае заданное неравенство выполняется на интервале $]a+3;\ 3a[$. Чтобы оно выполнялось при всех $x\in[1;\ 3]$, необходимо и достаточно, чтобы имела непустое множество решений система неравенств

$$\begin{cases}a+3<1,\\ 3a>3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<-2,\\ a>1.\end{cases}$$

Мы пришли к противоречивой системе, поэтому в данном случае задача не имеет решений.

81. $k\in]-\infty;\ 0]\cup\{1\}$. Решение. Перепишем неравенства в виде $(x-3k)^2>4(k-1)^2$ и $(x-2k)^2\geqslant k$. Из второго неравенства видим, что при $k\in]-\infty;\ 0]$ оно выполняется для любого действительного x. Остается иссле-

довать случай, когда $k\in]0; +\infty[$. Из первого неравенства получаем

$$x\in]-\infty; 3k-2|k-1|[\cup]3k+2|k-1|; +\infty[.$$

Из второго неравенства получаем

$$x\in]-\infty; 2k-\sqrt{k}]\cup[2k+\sqrt{k}; +\infty[.$$

Если найдутся такие значения $k>0$, что выполняется или неравенство

$$3k+2|k-1|\leqslant 2k-\sqrt{k}, \tag{1}$$

или неравенство

$$2k+\sqrt{k}\leqslant 3k-2|k-1|, \tag{2}$$

то для этих значений k любое действительное x будет являться решением хотя бы одного из данных неравенств. Неравенство (1) можно переписать так: $k+\sqrt{k}+2|k-1|\leqslant 0$, где $k>0$, $\sqrt{k}>0$, $|k-1|\geqslant 0$, следовательно, неравенство (1) противоречиво. Перепишем неравенство (2) в виде

$$\sqrt{k}\leqslant k-2|k-1|. \tag{3}$$

Рассмотрим два случая: $k\in[1; +\infty[$ и $k\in]0; 1[$. В первом случае неравенство (3) перепишется так: $\sqrt{k}\leqslant 2-k$, и, следовательно, если оно выполняется, то только для некоторых из $k\in[1; 2[$. Для этих k, возведя в квадрат правую и левую части, получим после преобразований неравенство $k^2-5k+4\geqslant 0$. Это неравенство справедливо только для $k\in]-\infty; 1]\cup[4; +\infty[$. Из всех этих значений условию $k\in[1; 2[$ удовлетворяет лишь одно значение $k=1$. Рассмотрим теперь случай $k\in]0; 1[$. В этом случае неравенство (3) перепишем так $\sqrt{k}\leqslant 3k-2$, и, следовательно, если оно и выполняется, то только для некоторых из $k\in]2/3; 1[$. Для этих k, возводя в квадрат правую и левую части, получим после преобразований неравенство $9k^2-13k+4\geqslant 0$. Это неравенство справедливо только для $k\in]-\infty; 4/9]\cup[1; +\infty[$. Так как $4/9<2/3$, то ни одно из этих значений k не удовлетворяет условию $k\in]2/3; 1[$. Объединяя все полученные результаты, находим, что задача имеет решение лишь при $k\in]-\infty; 0]\cup\{1\}$.

82. $a\in]-1/4; 1[$. Решение. Находим корни уравнения

$$x^2-2x-a^2+1=0; \tag{1}$$

это будут $x_1=1-|a|$, $x_2=1+|a|$, $x_1\leqslant x_2$. Находим корни уравнения

$$x^2-2(a+1)x+a(a-1)=0; \tag{2}$$

это будут $x_3=a+1-\sqrt{1+3a}$, $x_4=a+1+\sqrt{1+3a}$, $x_3\leqslant x_4$. Корни уравнения (2) будут действительными при условии, что $-1/3\leqslant a$. Требуется найти такое a, чтобы выполнялись неравенства

$$a+1-\sqrt{1+3a}<1-|a|\leqslant 1+|a|<a+1+\sqrt{1+3a}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай $a<0$; тогда неравенства (3) примут вид $a+1-\sqrt{1+3a}<1+a\leqslant 1-a<a+1+\sqrt{1+3a}$. В этом случае надо удовлетворить лишь неравенству $1-a<a+1+\sqrt{1+3a}$, или $-2a<\sqrt{1+3a}$, где $-2a>0$; возводя в квадрат правую и левую части неравенства, получим после преобразований неравенство $4a^2-3a-1<0$, которое выполняется для $a\in]-1/4; 1[$. Так как у нас $a<0$, то поставленная задача имеет решение для $a\in]-1/4; 0[$. Пусть теперь $a\geqslant 0$; тогда неравенство (3) можно переписать так: $a+1-\sqrt{1+3a}<1-a\leqslant 1+a<a+1+\sqrt{1+3a}$. В этом случае надо удовлетво-

рить лишь неравенству $a+1-\sqrt{1+3a} < 1-a$, или $2a < \sqrt{1+3a}$, где $2a \geqslant 0$; возводя в квадрат правую и левую части неравенства, получим после преобразований неравенство $4a^2-3a-1 < 0$, которое выполняется для $a \in]-1/4;\ 1[$. Так как в рассматриваемом случае $a \geqslant 0$, то поставленная задача имеет решение для $a \in [0;\ 1[$. Итак, корни первого уравнения лежат между корнями второго уравнения, если $a \in]-1/4;\ 1[$.

83. $\varnothing$. **84.** $[1;\ 4/3]$. **85.** $\varnothing$. **86.** $]-2/3;\ 3[$. **87.** $]-\infty;\ +\infty[$. **88.** $]-\infty;\ -1[\cup]15;\ +\infty[$. **89.** $[-2;\ 1]$.

90. $]-3;\ -2[\cup]2;\ 3[$. Решение. Заданное неравенство равносильно неравенству $(|x|-2)(|x|-3) < 0$, откуда $2 < |x| < 3$. При $x > 0$ получаем $2 < x < 3$, а при $x < 0$ получаем $2 < -x < 3$, или $-3 < x < -2$.

91. $]-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty[$. Решение. Заданное неравенство равносильно неравенству $(|x|+1)(|x|-2) \geqslant 0$, которое равносильно неравенству $|x| \geqslant 2$ (так как $|x|+1 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$). Раскрывая модуль, при $x \geqslant 0$ получаем $x \geqslant 2$, а при $x < 0$ получаем $-x \geqslant 2$, или $x \leqslant -2$.

92. $]-1;\ 5[$. Указание. Неравенство $|x^2-2x| < 5$ равносильно двойному неравенству $-5 < x^2-4x < 5$, равносильному системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x-5 < 0, \\ x^2-4x+5 > 0, \end{cases}$$

решая которую, получим $-1 < x < 5$.

93. $]-(1+\sqrt{21})/2;\ (\sqrt{21}-1)/2[$. **94.** $]-1;\ 2[\cup]3;\ 6[$.

95. $]1;\ 3[$. Указание. Заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ -x < x^2-2x < x. \end{cases}$$

96. $]2;\ 5[$. **97.** $]1-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2}[$.

98. $]2;\ 4[$. Решение. Следует рассмотреть два случая: 1) $x \geqslant 4$; 2) $x < 4$.

1) При $x \geqslant 4$ заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ (x-4)^2 < 0, \end{cases}$$

которая имеет пустое множество решений.

2) При $x < 4$ заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x < 4, \\ x^2-6x+8 < 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $2 < x < 4$.

99. $]-5;\ 3+2\sqrt{2}[$. **100.** $]1;\ 3[$. **101.** $]-\infty;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$.

102. $]-\infty;\ (4-\sqrt{2})/2]\cup[(5+\sqrt{3})/2;\ +\infty[$.

103. $]-\infty;\ (4-\sqrt{19})/3[\cup](4+\sqrt{19})/3;\ +\infty[$.

104. $]-\infty;\ -5-\sqrt{19}[\cup]\sqrt{2}-2;\ +\infty[$.

105. $]-\infty;\ (5-\sqrt{57})/2[\cup](5+\sqrt{57})/2;\ +\infty[$.

106. $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$.

107. $]1;\ 3[$. Указание. Заданное неравенство равносильно неравенству $|x-6| > x^2-5x+9$, так как $x^2-5x+9 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

108. $]-7;\ -2[\cup]3;\ 4[$. Указание. Рассмотрите три случая: 1) $x \leqslant -2$; 2) $-2 < x < 1$; 3) $x \geqslant 1$.

109. $]-\infty;\ 2\sqrt{2}[\cup]2+2\sqrt{3};\ +\infty[$. Решение. При $x\leqslant 0$ неравенство выполняется, что очевидно. Так как $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$, то при $x>0$ следует рассмотреть два случая: 1) $0<x<4$; 2) $x\geqslant 4$.

1) При $0<x<4$ заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 0<x<4, \\ x^2-8<0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $0<x<2\sqrt{2}$.

2) При $x\geqslant 4$ заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant 4, \\ x^2-4x-8>0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $x>2+2\sqrt{3}$. Объединяя полученные решения, находим приведенное выше выражение.

110. $k=15$. **111.** $]-\sqrt{2};\ 1[\cup[\sqrt{2};\ +\infty[$. **112.** $a_1=1-\sqrt{2}$, $a_2=5+\sqrt{10}$. **113.** $a<0$.

§ 5

1. $\{\sqrt{3}-2;\ \sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1;\ \sqrt{3}+2\}$. **2.** $\{-3, 3\}$.

4. $\{(5-\sqrt{21})/2;\ (5+\sqrt{21})/2\}$. Указание. Представьте уравнение в виде $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=15$ и положите $x^2-5x+4=y$.

5. $\left\{\left(-5a\pm\sqrt{5a^2\pm 4\sqrt{a^4+b^4}}\right)/2\right\}$, если $|a|\geqslant 2|b|/\sqrt{3}$; $\left\{\left(-5a\pm\sqrt{5a^2+4\sqrt{a^4+b^4}}\right)/2\right\}$, если $|a|<2|b|/\sqrt{3}$. Указание. Представьте уравнение в виде $(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=b^4$ и положите $x^2+5ax+4a^2=y$. **6.** $\varnothing$. **7.** $\{-1;\ 1/2\}$. **8.** $\{1/2\}$. **9.** $\{2\}$.

10. $x_1=a$, $x_2=-1$ при всех $a\in]-\infty;\ -1[$; $x_1=a$, $x_3=-2a^2$ при всех $a\in]-1/2;\ 0[$. Решение. Решая данное уравнение, найдем три значения $x_1=a$, $x_2=-1$, $x_3=-2a^2$, которые обращают в нуль или первый, или второй множитель данного уравнения. Заметим, что при $a\geqslant 0$ $x_2-x_1<0, x_3-x_1<0$, т. е. $x_2-a<0$, $x_3-a<0$, т. е. если при $a\geqslant 0$ в уравнения вместо x подставить x_2 или x_3, то множитель $\sqrt{x-a}$ не имеет смысла. Следовательно, при $a\geqslant 0$ данное уравнение имеет лишь один корень $x_1=a$. Будем считать $a<0$. При $a=-1$ имеем $x_1=x_2>x_3$, т. е. $x_3-x_1=x_3-a<0$; итак, $x_3=-2a^2$ не является корнем уравнения при $a=-1$; уравнение имеет два совпавших корня $x_1=x_2$, что не удовлетворяет условию задачи. При $a=-2a^2$, т. е. при $a=-1/2$, $x_2-a=-1+1/2=-1/2<0$, т. е. $x_2=-1$ не является корнем уравнения; уравнение имеет два совпадающих корня $x_1=x_3$, что не удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим теперь три случая 1) $a\in]-\infty;\ -1[$, 2) $a\in]-1;\ -1/2[$, 3) $a\in]-1/2,\ 0[$. В случае 1) имеем $-2a^2<a<-1$, т. е. $x_3<x_1<x_2$. Следовательно, $x_3-x_1=x_3-a<0$ и x_3 не является корнем уравнения, а $x_2-x_1=x_2-a>0$ и, следовательно, x_2 является корнем уравнения, т. е. при $a\in]-\infty,\ -1[$ уравнение имеет только два различных корня x_1 и x_2. В случае 2) имеем $-1<a$ и $a<-1/2$, т. е. $a^2>-a/2$ или $-2a^2<a$. Следовательно, в этом случае $x_2-x_1=x_2-a<0$ и $x_3-x_1=x_3-a<0$, т. е. ни x_2, ни x_3 не являются корнями данного уравнения; уравнение имеет при $a\in]-1;\ -1/2[$ только один корень $x_1=a$. В случае 3) имеем $a>-1/2$, следовательно, $-2a^2>a>-1$, т. е. $x_2<x_1<x_3$; в этом случае $x_3-x_1=x_3-a>0$, а $x_2-x_1=x_2-a<0$. Таким образом, x_3 является корнем уравнения, а x_2 не является. Уравнение при $a \in]-1/2,\ 0[$ имеет два различных действительных корня $x_1=a$ и $x_3=-2a^2$. Итак, данное уравнение имеет только два различных действительных корня $x_1=a$ и $x_2=-1$ при $a \in]-\infty;\ -1[$ и два действительных различных корня $x_1=a$ и $x_3=-2a^2$ при $a \in]-1/2;\ 0[$.

11. $\{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 10\}$.

12. а) Уравнение не имеет решений при $a \in]-\infty;\ -1[\,\cup\,]5/4;\ +\infty[$; б) уравнение имеет одно решение при $a=-1$; в) уравнение имеет два решения при $a \in]-1;\ 1[\,\cup\,\{5/4\}$; г) уравнение имеет три решения при $a=1$. Решение. Корни данного уравнения имеют вид

$$x=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}-a}}. \qquad (1)$$

а) Из рассмотрения выражения (1) видно, что уравнение не имеет ни одного корня, если $5/4 < a$, т. е. $a \in]5/4;\ +\infty[$, или $a \leqslant 5/4$, но $a-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-a} < 0$, т. е. $\sqrt{\frac{5}{4}-a} < \frac{1}{2}-a$; это неравенство может выполняться только при $a < 1/2$; возводя в квадрат правую и левую части неравенства, получим (после преобразования) $a^2 > 1$, или $|a| > 1$; учитывая, что $a < 1/2$, получаем отсюда $a < -1$, т. е. $a \in]-\infty;\ -1[$. Итак, уравнение не имеет ни одного решения, если $a \in]-\infty;\ -1[\,\cup\,]5/4;\ +\infty[$. б) Уравнение имеет только одно решение $x=0$, если $a-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-a}=0$, т. е. $\sqrt{\frac{5}{4}-a}=\frac{1}{2}-a$. Это равенство возможно лишь при условии, что $a < 1/2$. Возводя в этом равенстве правую и левую части в квадрат, получим после преобразований $a^2=1$, т. е. $a=-1$ ($a=1 > 1/2$, а должно быть $a < 1/2$). Итак, при $a=-1$ уравнение имеет только одно решение. в) Если в выражении (1)

$$a-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-a} > 0 \quad \text{и} \quad a-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}-a} < 0, \quad \text{или} \quad a=5/4, \qquad (2)$$

то уравнение имеет только два решения. Преобразуем неравенство (2) $\frac{1}{2}-a < \sqrt{\frac{5}{4}-a}$, $a-\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4}-a}$. Второе из этих неравенств выполняется для всех $a \leqslant 1/2$ и для $a > 1/2$, для которых $a^2 < 1$, т. е. $1/2 < a < 1$, т. е. второе неравенство из (2) выполняется для всех $a \in]-\infty;\ 1[$. Первое неравенство из (2) выполняется для всех $5/4 \geqslant a \geqslant 1/2$ и для $a < 1/2$, для которых $a^2 < 1$, или $-1 < a < 1/2$, т. е. первое неравенство из (2) выполняется для всех $a \in]-1;\ 5/4[$. Таким образом, уравнение имеет два решения, если одновременно выполняются оба неравенства из (2), т. е. при всех $a \in]-1;\ 1[$, или $a=5/4$. г) Уравнение имеет три решения, если выполняются условия

$$a-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-a} > 0 \quad \text{и} \quad a-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}-a}=0. \qquad (3)$$

Первое из этих условий выполняется для всех $a \in]-1;\ 5/4[$ (см. п. в)). Второе условие эквивалентно равенству $a-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}-a}$, т. е. $a \geqslant 1/2$. Возводя в квадрат правую и левую части этого равенства, получим после преобразований $a^2=1$, т. е. $|a|=1$; так как $a > 1/2$, то получаем $a=1$; это значение удовлетворяет и первому из условий (3). Следовательно, уравнение имеет только три решения при $a=1$. д) Если $a\in]1;\ 5/4[$, то уравнение имеет четыре решения.

13. При всех $a\in]0;\ 1[\cup]1;\ 5-\sqrt{15}[\cup]5+\sqrt{15};\ +\infty[$.

14. $x=b/2$. Решение существует и единственно при $b\neq 0$.

15. $a\in]-1/2;\ 3[$. Решение. $\frac{x-2a-3}{x-a+2}<0 \Leftrightarrow 2-\frac{x+7}{x+2-a}<0 \Leftrightarrow 2<$ $<\frac{x+7}{x+2-a}$. Последнее неравенство должно выполняться при всех $1\leqslant x\leqslant 2$; при этих значениях x числитель $x+7<0$, следовательно, для выполнения неравенства

$$2<\frac{x+7}{x+2-a} \tag{1}$$

знаменатель $x+2-a$ должен быть положителен, т. е. $x+2-a>0$, или $a<x+2$ для всех $1\leqslant x\leqslant 2$, следовательно, $a<3$. Неравенство (1) перепишем так (учитывая, что $1\leqslant x\leqslant 2$)

$$\frac{1}{2}>\frac{x+2-a}{x+7}\Leftrightarrow\frac{1}{2}>1-\frac{a+5}{x+7}\Leftrightarrow\frac{a+5}{x+7}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+5>\frac{x+7}{2}\Leftrightarrow a>\frac{x-3}{2}\Rightarrow a>-\frac{1}{2}.$$

Итак, неравенство (1), а значит, и заданное в условии задачи, будет выполнено для всех $a\in]-1/2;\ 3[$.

16. $x=-6$. **17.** $x=2$. **18.** $x=-4$. **19.** $x=1$. **20.** $x=2$. **21.** $x=2$. **22.** $x=-2$. **23.** $\{11;\ 12;\ 14;\ 15\}$. **24.** б) Все $a\in[11/4;\ +\infty[$. а) Следует из б). **25.** $m\in]-7;\ 1[$.

26. $k\in[(7+3\sqrt{5})/2;\ +\infty[$. Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{x^2-kx+k^2-6k}{k(6+x)}\geqslant 0. \tag{1}$$

Дискриминант квадратного трехчлена

$$x^2-kx+k^2-6k \tag{2}$$

равен $3k(8-k)$. Он отрицателен при $k<0$ и $k>8$. При этих значениях k числитель дроби (1) положителен, поэтому множество решений неравенства (1) при $k<0$ будет $]-\infty;\ -6[$, а при $k>8$ будет $]-6;\ +\infty[$. Следовательно, все $k>8$ удовлетворяют условию задачи, а все $k<0$ условию задачи не удовлетворяют.

При $k=0$ неравенство (1) не определено.

При $k=8$ неравенство (1) имеет вид $\frac{(x-4)^2}{8(6+x)}\geqslant 0$ и выполняется при всех $-1<x<1$.

Рассмотрим $0<k<8$. В этом случае квадратный трехчлен (2) имеет два корня $x_1=\frac{k-\sqrt{3k(8-k)}}{2}$, $x_2=\frac{k+\sqrt{3k(8-k)}}{2}$, причем $x_1<x_2$ при всех $0<k<8$. В самом деле, неравенство $x_1>-6$ при $0<k<8$ равносильно неравенству $k+12>\sqrt{3k(8-k)}$, которое равносильно неравенству k^2+24k+

$+144>24k-3k^2$, или $4k^2+144>0$. Так как $x_2>0$ при всех $0<k<8$, то при данных значениях k задача имеет решение лишь при $x_1\geqslant 1$, т. е. если $\frac{k-\sqrt{3k(8-k)}}{2}\geqslant 1$, или $k-2\geqslant\sqrt{3k(8-k)}$, которое может выполняться лишь при $2<k\leqslant 8$ и при всех $2<k<8$ равносильно неравенству $(k-2)^2\geqslant 3k(8-k)$. Решая систему неравенств

$$\begin{cases} 2<k<8, \\ (k-2)^2\geqslant 3k(8-k), \end{cases}$$

получаем множество решений $[(7+3\sqrt{5})/2;\ 8[$. Объединяя полученные результаты, находим $k\in[(7+3\sqrt{5})/2;\ +\infty[$.

27. $]1;\ 2[\cup]2;\ 3[$. 28. $]-1/4;\ 5/6[$. 29. $]-\infty;\ 3/2[\cup]7/3;\ +\infty[$. 30. $]-\infty;\ +\infty[$. 31. $]2;\ 3[$. 32. $]-3;\ 1[$. 33. $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$. 34. $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ -1/2[\cup]1;\ +\infty[$. 35. $]-2;\ -1[\cup]1;\ 2[$. 36. $[-3;\ 3]$. 37. $]-\infty;\ 2[\cup]5;\ +\infty[$. 38. $]-\infty;\ 1[\cup]3/2;\ +\infty[$. 39. $]-\infty;\ 5/2[\cup[33/8;\ +\infty[$. 40. $]-6;\ 3[$. 41. $]-\infty;\ 0[\cup]4;\ +\infty[$. 42. $]-7;\ -3[$. 43. $]-17/25;\ -3/8[$. 44. $]-\infty;\ -5[\cup]5;\ +\infty[$. 45. $]-\infty;\ 1[\cup]4;\ +\infty$. 46. $]-3;\ 1[$. 47. $]-\infty;\ 0[\cup]3;\ +\infty[$. 48. $]-\infty;\ 3[\cup]4;\ +\infty[$. 49. $]-\infty;\ +\infty[$. 50. $]-1;\ 5[$. 51. $]5/2;\ 8[$. 52. $]2;\ 3[$. 53. $]-\infty;\ -1[\cup]5;\ +\infty[$. 54. $]-\infty;\ -1[\cup]1/3;\ +\infty[$. 55. $]-1/2;\ 2[$. 56. $]-\infty;\ -20[\cup]23;\ +\infty[$. 57. $]-2;\ +\infty[$. 58. $]-1;\ 0[\cup]4;\ +\infty[$. 59. $]-5;\ -2[\cup]-2/3;\ +\infty[$. 60. $]-\infty;\ (2-\sqrt{22})/3[\cup](2+\sqrt{22})/3;\ 5/2[$. 61. $]-17/2;\ -3[\cup]1;\ +\infty[$. 62. $]-\infty;\ -3[\cup]3;\ +\infty[$. 63. $[1;\ 3]\cup]5;\ +\infty[$. 64. $]-\infty;\ -1/\sqrt[3]{2}[\cup]0;\ +\infty[$. 65. $]-\infty;\ 6[\cup[-2;\ 0[\cup[3;\ +\infty[$. 66. $]2;\ 3[\cup]5;\ 6[$. 67. $]1;\ 7[$. 68. $]-6;\ 3[$. 69. $]-5;\ 1[\cup\{3\}$. 70. $]-1;\ +\infty[$. 71. $]-9/2;\ -2[\cup]3;\ +\infty[$. 72. $]-1;\ 1[\cup]4;\ 6[$. 73. $]-(1+\sqrt{21})/2;\ (\sqrt{21}-1)/2[$. 74. $]1/2;\ 3[$. 75. $]-\infty;\ -1[\cup]4;\ +\infty[$. 76. $]-\infty;\ -5/2[\cup]-2;\ 8[$. 77. $]3/4;\ 1[\cup]7;\ +\infty[$. 78. $]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[$. 79. $]-5;\ 1[$. 80. $]-\infty;\ -4[\cup]-3;\ 3[\cup]6;\ +\infty[$. 81. $]-\infty;\ -\sqrt{7}[\cup]-2;\ \sqrt{7}[\cup[8/3;\ +\infty[$. 82. $]-\infty;\ -3[\cup]-\sqrt{7}/2;\ \sqrt{7}/2[\cup]4;\ +\infty[$. 83. $[1;\ 2[\cup]3;\ 4]$. 84. $]-\sqrt{2};\ -1[\cup]-1;\ \sqrt{2}[\cup[3;\ 4[$. 85. $]-\infty;\ -\sqrt{7}/2[\cup]-1;\ \sqrt{7}/2[\cup]4/3;\ +\infty[$. 86. $]-(11+\sqrt{737})/28;\ 4/7[\cup](\sqrt{737}-11)/28;\ 1[$. 87. $]-\infty;\ -\sqrt{10}[\cup]-1/2;\ 2/5[\cup]\sqrt{10};\ +\infty[$. 88. $]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ 4[$. 89. $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$. 90. $]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ 0[\cup]1/2;\ +\infty[$. 91. $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ 2[\cup]3;\ +\infty[$. 92. $]-\infty;\ -5[\cup]1;\ 2[\cup]6;\ +\infty[$. 93. $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1/2[\cup]1;\ +\infty[$. 94. $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ 6[$. 95. $]1;\ 2[\cup]7;\ +\infty[$. 96. $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ 3[$. 97. $]-\sqrt{2};\ 0[\cup]1;\ \sqrt{2}[\cup]2;\ +\infty[$. 98. $]-5;\ 1[\cup]2;\ 3[$. 99. $]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ 3[\cup]4;\ +\infty[$. 100. $]-\infty;\ -7[\cup]-4;\ -2[$. 101. $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ -1[$. 102. $]-\infty;\ -4]\cup[-2;\ -1]\cup[1;\ +\infty[$. 103. $]-2;\ -1[\cup]2,\ 3[$. 104. $]-\infty;\ -1]\cup]0;\ 1]\cup]2;\ 3]$. 105. $[-4;\ -3[\cup[-3/2;\ 0[\cup[1;\ +\infty[$. 106. $]-\infty;\ -|a|[\cup]|a|;\ +\infty[$, если $a\neq 0$; $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$, если $a=0$. 107. $]-\infty;\ -1]\cup[0;\ +\infty[$. 108. $]2;\ 3[$. 109. $]-7;\ -4[\cup]-4;\ 1[$. 110. $]2;\ +\infty[$.

111. $]2;\ 4[\cup]4;\ 6[$. Указание. Заданное неравенство равносильно системе неравенств $|x-4|<2,\ x\neq 4$.

112. $]3/4;\ 1[\ \cup\ ]1;+\infty[$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $\frac{2x-1}{x-1}>2$ и $\frac{2x-1}{x-1}<-2$.

113. $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-1;\ +\infty[$. Указание. Так как $x^2+x+1>0$ при всех $x\in R$, то заданное неравенство равносильно $|x^2-3x-1|<3(x^2+x+1)$, или $-3(x^2+x+1)<x^2-3x-1<3(x^2+x+1)$, или

$$\begin{cases} -3(x^2+x+1)<x^2-3x-1, \\ x^2-3x-1<3(x^2+x+1). \end{cases}$$

114. $]-5;\ -2[\ \cup\ ]2;\ 3[\ \cup\ ]3;\ 5[$. **115.** $]-5;\ -2[\ \cup\ ]-1;+\infty[$. **116.** $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-1/2;\ +\infty[$.

117. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. Указание. Неравенство можно записать в виде $|x+2|/x<3$. **118.** $]-\infty;\ -5[\ \cup\ ]-3;\ 3[\ \cup\ ]5;\ +\infty[$.

119. $]-\infty;\ -4]\cup[-1;\ 1]\cup[4;\ +\infty[$. Указание. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-1\leqslant\frac{3x}{x^2-4}\leqslant 1$, или системе

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4}+1\geqslant 0, \\ \dfrac{3x}{x^2-4}-1\leqslant 0. \end{cases}$$

120. $[0;\ 8/5]\cup[5/2;\ +\infty[$.

121. $[3/2;\ 2[$. Указание. Так как $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, то при $x>3$ данное неравенство равносильно неравенству $1/(x-2)\geqslant 2$, а при $x<3$ равносильно неравенству $1/(2-x)\geqslant 2$.

122. $]-\infty;\ 3[$. **123.** $]-\sqrt{-a};\ 0[$ при $a<0$; $]0;\ \sqrt{a}[$ при $a>0$; $\varnothing$ при $a=0$. **124.** $]3;\ 4[$. **125.** $[-3,\ 0[\ \cup\ [20;\ +\infty[$.

126. $]-\infty;\ -3[\ \cup\ ]-2;\ +\infty[$. **127.** $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ 3]$.

128. $]-\infty;\ -1]\cup]5;\ 6]$. **129.** $]-\infty;\ -3[\ \cup\ [1;\ 4[$.

130. $]-\infty;\ -1,4]\cup]2;\ 2{,}6]$. **131.** $[1;\ 6]$. **132.** $[2;\ 3]$. **133.** $[-1;\ 7/3]$.

134. $]-2;\ -1[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.

135. $]-2;\ (3-\sqrt{17})/2]\cup]0;\ 2[\ \cup\ [(3+\sqrt{17})/2;\ +\infty[$.

§ 6

1. $\{1/2;\ 1\}$; **2.** $\{-1;\ 2\}$. **3.** $\{-3;\ 2\}$. **4.** $\{-4;\ 3\}$. **5.** $\{6\}$. **6.** $\{-27/8;\ 1\}$. **7.** $\{-8;\ 27\}$. **8.** $\{8;\ 27\}$. **9.** $\{3\}$. **10.** $\{1\}$. **11.** $\{3\}$. **12.** $\{9\}$. **13.** $\{-1;\ 8\}$.

14. $\{2\}$. Решение. Положив $\sqrt[6]{\log_2 x}=t$, получаем уравнение $t^3+t^2-2=0$, или $t^3-1+t^2-1=0$, или $(t-1)(t^2+t+1)+(t-1)(t+1)=0$, или $(t-1)(t^2+2t+2)=0$, откуда $t=1$, т. е. $\log_2 x=1$, $x=2$.

15. $\{-1\}$. **16.** $\{-3/2;\ 1/2\}$. Указание. Положите $\sqrt{(3-x)/(2+x)}=t$. **17.** $\{5/2\}$. **18.** $\{5/3\}$. **19.** $\{3\}$. **20.** $\{3\}$. **21.** $\{8\}$. **22.** $\{28\}$. **23.** $\{0\}$. **24.** $\{4\}$. **25.** $\{19\}$. **26.** $\{3\}$. **27.** $\{6\}$. **28.** $\{-1\}$. **29.** $\{3\}$. **30.** $\{2\}$. **31.** $\{1\}$. **32.** $\{5\}$. **33.** $\{0;\ 4/3\}$. **34.** $\left\{3+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$. **35.** $\{1\}$. **36.** $\{4\}$. **37.** $\{2\}$. **38.** $\{5\}$. **39.** $\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

40. $\{2\}$. Указание. Положите $x^2-4x+6=y$.

41. $\{-9/2;\ 3\}$. Указание. Положите $\sqrt{2x^2-4x+9}=y$. **42.** $\{-4;\ 2\}$. Указание. Положите $\sqrt{2x^2-4x+12}=y$. **43.** $\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$.

44. $\{-5;\ 0\}$. **45.** $\{2\}$. **46.** $\{2/3\}$. **47.** $\{-3\}$. **48.** $\{-1;\ 9/16\}$. **49.** $\{2\}$. **50.** $\{5\}$.

51. $\{-1;\ 15\}$. **52.** $\{4\}$. **53.** $\{20\}$. **54.** $\{10\}$. **55.** $\{6\}$. **56.** $\{-1;\ 3\}$. **57.** $\{-5;\ 4\}$.
58. $\{-1\}$. Решение. Заметим, что

$$\sqrt{3x^2+6x+7}=\sqrt{3(x+1)^2+4}\geqslant\sqrt{4}=2,$$

$\sqrt{5x^2+10x+14}=\sqrt{5(x+1)^2+9}\geqslant\sqrt{9}=3$, $4-2x-x^2=5-(x+1)^2\leqslant 5$.
Следовательно, левая часть уравнения $\geqslant 5$ при любых $x\in \boldsymbol{R}$, а правая часть уравнения $\leqslant 5$ при любых $x\in\boldsymbol{R}$. Равенство между ними возможно лишь при условии, что обе части уравнения равны 5 при одном и том же значении x. У нас правая и левая части уравнения равны 5 при $x=-1$.

59. $\{3\}$. **60.** $\{-1,\ 2\}$. **61.** $\{2;\ 34\}$. **62.** $\{-1\}$. **63.** $\{5\}$. **64.** $\{8+4\sqrt{2}\}$.
65. $\{-1\}$. **66.** $\{4\}$. **67.** $\{1\}$. **68.** $\{5\}$.

69. $\{-15;\ 13\}$. Решение. $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2\Rightarrow\sqrt[3]{12-x}=$ $=2-\sqrt[3]{14+x}\Rightarrow 12-x=8-12\sqrt[3]{14+x}+6\sqrt[3]{(14+x)^2}-14-x\Rightarrow$ $\Rightarrow 6\left(\sqrt[3]{14+x}\right)^2-12\sqrt[3]{14+x}-18=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{14+x}\right)^2-2\sqrt[3]{14+x}-3=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\sqrt[3]{14+x}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2\Rightarrow\sqrt[3]{14+x}=-1$ или $\sqrt[3]{14+x}=3$; если $\sqrt[3]{14+x}=-1$, то $14+x=-1$ и $x=-15$; если $\sqrt[3]{14+x}=3$, то $14+x=27$ и $x=13$.

70. $\{(3-\sqrt{73})/4;\ 0;\ 3/2;\ (3+\sqrt{73})/4\}$. Указание. Положите $\sqrt{2x^2-3x+1}=y$. **71.** $\{1/4\}$. **72.** $\{0;\ 16/9\}$. **73.** $\{0;\ 5\}$. **74.** $\{7\}$. **75.** $\{16/25\}$. **76.** $\{4\}$. **77.** $\{-1\}$. **78.** $\{2\}$. **79.** $\{4\}$. **80.** $\{12/5;\ 4\}$. **81.** $\{4\}$. **82.** $\{-1\}$. **83.** $\{0\}$. **84.** $\{4\}$. **85.** $\{2\}$. **86.** $\{1\}$. **87.** $\{8\}$. **88.** $\{22/9;\ 6\}$. **89.** $\{12/127\}$. **90.** $\{12\}$. **91.** $\{3;\ 5\}$. **92.** $\{0;\ -1\}$. Указание. Положите $x^2+x+4=y$. **93.** $\{1\}$. Указание. Найдите область определения уравнения. **94.** $\{-47/24\}$. **95.** $\{73/32\}$.

96. $\{[-1;\ 1]\}$. Указание. Запишите уравнение в виде $\sqrt{(x-1)^2}+$ $+\sqrt{(x+1)^2}=2$, или $|x-1|+|x+1|=2$, затем рассмотрите три случая: 1) $x<-1$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 3) $x>1$. Убедитесь в том, что при $-1\leqslant x\leqslant 1$ уравнение выполняется тождественно.

97. $\{[2;\ +\infty[\}$. **98.** $\{[2;\ +\infty[\}$. **99.** $\{[5;\ 10]\}$.

100. $\{(-1-\sqrt{5})/2;\ (\sqrt{5}-1)/2;\ 1\}$. Решение. Положим $\sqrt[3]{2x-1}=y$; тогда $2x-1=y^3$, $y^3+1=2x$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+1=2y,\\ y^3+1=2x,\end{cases}$$

откуда следует $x^3-y^3=2(y-x)$, или $(x-y)(x^2+xy+y^2)+2(x-y)=0$. Отсюда получаем 1) $x-y=0$; 2) $x^2+xy+y^2=-2$. Последнее уравнение можно записать в виде $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+2=0$. Это уравнение не имеет решений. Возвращаясь к неизвестному x, первое уравнение запишем в виде $\sqrt[3]{2x-1}=x$, или $x^3-2x+1=0$, или $x^3-1-2(x-1)=0$, или $(x-1)\times$ $\times(x^2+x-1)=0$. Решая это уравнение, получаем $x=1$, $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$.

101. $\{-2;\ 1+\sqrt{5}\}$.

102. $x\in\varnothing$, если $a\in]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1[$; $x=\{0\}$, если $a=0$; $x=\{(2a-1-\sqrt{4a-3})/3\}$, если $a\in[1;\ +\infty[$. Решение. Так как x находится под знаком квадратного радикала, то $x\geqslant 0$, левая часть уравнения $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}\geqslant 0$, следовательно, $a\geqslant 0$, кроме того, поскольку a есть сумма

x и неотрицательной величины $\sqrt{a+\sqrt{x}}$, то $x \leqslant a$. Таким образом, из рассмотрения самого уравнения мы приходим к выводу, что при $a \in]-\infty;\ 0[$ уравнение действительных решений не имеет. Будем считать $a \geqslant 0$. Тогда

$$x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a \Rightarrow \sqrt{a+\sqrt{x}}=a-x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+\sqrt{x}=a^2-2ax+x^2 \Rightarrow a^2-(2x+1)a+x^2-\sqrt{x}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=\left(2x+1 \pm \sqrt{4x^2+4x+1-4x^2+4\sqrt{x}}\right)/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=\left(2x+1 \pm \sqrt{4x+4\sqrt{x}+1}\right)/2 \Rightarrow a=(2x+1 \pm (2\sqrt{x}+1))/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=x+\sqrt{x}+1 \quad \text{или} \quad a=x-\sqrt{x}.$$

Рассмотрим первую возможность $a=x+\sqrt{x}+1$; учитывая, что в правой части сумма трех неотрицательных слагаемых, один из которых равен 1, получаем, что если $0 \leqslant a < 1$, то написанное уравнение решений не имеет. Будем рассматривать случай $a \geqslant 1$; тогда

$$a=x+\sqrt{x}+1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1-a=0 \Rightarrow \sqrt{x}=(-1 \pm \sqrt{1-4+4a})/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}=(-1+\sqrt{4a-3})/2, \quad \text{или} \quad \sqrt{x}=-(1+\sqrt{4a-3})/2,$$

но $\sqrt{x} \geqslant 0, a \geqslant 1$, поэтому второй случай невозможен; итак,

$$\sqrt{x}=(\sqrt{4a-3}-1)/2 \Rightarrow x=(2a-1-\sqrt{4a-3})/2 \text{ при } a \geqslant 1.$$

Рассмотрим теперь случай $a=x-\sqrt{x}$; здесь a может быть любым неотрицательным числом, тогда

$$a=x-\sqrt{x} \Rightarrow x-\sqrt{x}-a=0 \Rightarrow \sqrt{x}=(1 \pm \sqrt{1+4a})/2.$$

Заметим, что соотношение $\sqrt{x}=(1-\sqrt{1+4a})/2 \leqslant 0$, и, следовательно, возможно только при $a=0$; тогда $x=0$. В случае $\sqrt{x}=(1+\sqrt{1+4a})/2 \Rightarrow x= =(2a+1+\sqrt{4a+1})/2 > a$, что невозможно. Объединяя все результаты, получаем, что $x \in \varnothing$, если $a \in]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1[$, $x=\{0\}$ при $a=0$ и $x=\{(2a-1-\sqrt{4a-3})/2\}$ при $a \in [1;\ +\infty[$.

103. $x \in \varnothing$, если $a \in]-\infty;\ -1/4[$, $x=\{(-1 \pm \sqrt{4a+1})/2\}$, если $a \in [-1/4; 0]$; $x=\{(-1-\sqrt{4a+1})/2\}$, если $a \in]0;\ 1[$; $x= =\{(-1-\sqrt{4a+1})/2; (1+\sqrt{4a-3})/2\}$, если $a \in [1;\ +\infty[$. Решение. 1-й способ. Этим способом решим уравнение подробно. Из рассмотрения уравнения замечаем, что $x \leqslant a \leqslant x^2$. Тогда

$$x^2-\sqrt{a-x}=a \Rightarrow x^2-a=\sqrt{a-x} \Rightarrow x^4-2x^2a+a^2=a-x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2-(2x^2+1)a+x+x^4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=(2x^2+1 \pm \sqrt{4x^4+4x^2+1-4x-4x^4})/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=(2x^2+1 \pm (2x-1))/2 \Rightarrow a=x^2+x \quad \text{или} \quad a=x^2-x+1.$$

Итак

$$a=x^2+x \quad \text{или} \quad a=x^2-x+1. \tag{1}$$

В случае $a=x^2+x$ пригодны лишь $x \leqslant 0$, так как $a \leqslant x^2$. Решаем уравнение $x^2+x-a=0 \Rightarrow x=(-1 \pm \sqrt{4a+1})/2$. Следовательно, данное уравнение при $a < -1/4$ решений не имеет, при $a \in [-1/4;\ 0]$ оно имеет множество решений $x=\{(-1 \pm \sqrt{4a+1})/2\}$, при $a \in]0;+\infty[$ решением будет лишь множество $x=\{(-1-\sqrt{4a+1})/2\}$, так как при $a > 0$ выражение $x= =(-1+\sqrt{4a+1})/2 > 0$, что в данном случае невозможно. В случае

$a=x^2-x+1$ пригодны лишь $x\geqslant 1$, так как $a\leqslant x^2$ при этом $a\geqslant 1$, ибо $a=1+x(x-1)$. Решаем уравнение

$$x^2-x+1-a=0 \Rightarrow x=(1\pm\sqrt{1-4+4a})/2 \Rightarrow x=(1\pm\sqrt{4a-3})/2.$$

При $a\geqslant 1$ выражение $(1-\sqrt{4a-3})/2\leqslant 0$, тогда как x в этом случае $\geqslant 1$. Следовательно, решением в этом случае будет лишь $x=(1+\sqrt{4a-3})/2$, которое при $a\geqslant 1$ также $\geqslant 1$. Итак, объединяя результаты, получим $x\in\varnothing$, если $a\in\,]-\infty;\ -1/4\,[$;

$$x=\{(-1\pm\sqrt{4a+1})/2\},\quad \text{если}\quad a\in[-1/4;\ 0];$$
$$x=\{(-1-\sqrt{4a+1})/2\},\quad \text{если}\quad a\in\,]\,0;\ 1\,[;$$
$$x=\{(-1-\sqrt{4a+1})/2;\ \ (1+\sqrt{4a-3})/2\},\ \text{если}\ a\in[1;\ +\infty\,[.$$

2-й способ. Запишем исходное уравнение в виде

$$x^2-x+\frac{1}{4}=(a-x)+\sqrt{a-x}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{a-x}+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow x-\frac{1}{2}=\pm\left(\sqrt{a-x}+\frac{1}{2}\right). \qquad (2)$$

Освобождаясь в уравнениях (2) от иррациональности, получаем уравнения (1).

3-й способ. Положив $\sqrt{a-x}=y$ и учитывая, что $a-x=y^2$, для определения x и y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y=a,\\ y^2+x=a.\end{cases} \qquad (3)$$

Вычитая из первого уравнения системы (3) второе уравнение системы, имеем

$$x^2-y^2-y-x=0\Leftrightarrow (x-y-1)(x+y)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x-y-1=0,\\ x+y=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a-x},\\ x=-\sqrt{a-x}.\end{array}\right.$$

Решим уравнение $x-1=\sqrt{a-x}$. Это уравнение равносильно системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства

$$\begin{cases} x^2-x+1-a=0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2},\\ x\geqslant 1,\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\\ x\geqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\quad x=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\quad\text{при } a\geqslant 1.$$

Решим уравнение

$$x=-\sqrt{a-x}. \qquad (4)$$

Это уравнение равносильно системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства

$$\begin{cases} x^2+x-a=0,\\ x\leqslant 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2},\\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

Корень $x=-(\sqrt{4a+1}+1)/2$ удовлетворяет уравнению (4) при всех $a\geqslant -1/4$ (и только при этих a).

Система, состоящая из одного уравнения и одного неравенства

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{4a+1}-1}{2}, \\ x\leqslant 0, \end{cases}$$

имеет решение лишь при $-1/4\leqslant a\leqslant 0$, поэтому корень $x=(\sqrt{4a+1}-1)/2$ удовлетворяет уравнению (4) при всех $-1/4\leqslant a\leqslant 0$ и только при этих значениях a. Объединяя все результаты, найдем все корни исходного уравнения.

104. $x=\{0\}$. Решение. Если $a<0$, то в левой части уравнения стоят два выражения $a\sqrt{x}\leqslant 0$ и $-\sqrt{x+2ax\sqrt{x^2+7a^2}}\leqslant 0$, сумма которых равна нулю; это возможно лишь при условии, что каждое из них равно нулю, а это возможно, только если $x=0$. Если $a=0$, то уравнение принимает вид $-\sqrt{x}=0$, которое удовлетворяется лишь в случае $x=0$. Если $a>0$, то перенеся второй радикал в правую часть уравнения и возведя в квадрат, получим после преобразований уравнение $x(a^2-1-2a\sqrt{x^2+7a^2})=0$, корнем которого является $x=0$. Если есть другие корни, то они удовлетворяют уравнению $a^2-1=2a\sqrt{x^2+7a^2}$, из которого видим, что $a^2>1$. Освобождаясь от радикала и преобразуя, получим $4a^2x^2+27a^4+2a^2-1=0$, что невозможно. Итак, при любых a уравнение имеет единственный корень $x=0$.

105. $\{4\}$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду $(x-4)^2+(2\sqrt{x}-4)^2=0$. **106.** $\{a^2-4a\}$ при $a>2$; $\varnothing$ при $a\leqslant 2$. **107.** $\varnothing$. **108.** $\{-2\}$. **109.** $\{-4/3\}$. **110.** $\{1/3\}$. **111.** $\{2\}$. **112.** $\{-3\}$. **113.** $\{2^{10}\}$. **114.** $\{76\}$. **115.** $\{1\}$. **116.** $\{2\}$. **117.** $\{1\}$. **118.** $\{5\}$.

119. Один; $x=-4/3$. Решение. Предположим, что уравнение имеет корни; тогда (учитывая, что $x^2>5/3$)

$$\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2-5/3}}=x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=x+\frac{1}{\sqrt{x^2-5/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1=x^2+\frac{2x}{\sqrt{x^2-5/3}}+\frac{1}{x^2-5/3} \Rightarrow x^2-\frac{8}{3}=2x\sqrt{x^2-\frac{5}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-\frac{4}{9}x^2-\frac{64}{27}=0 \Rightarrow x^2=\frac{2}{9}\pm\frac{14}{9} \Rightarrow x^2=\frac{16}{9} \text{ или } x^2=-\frac{4}{3}.$$

Возможен лишь первый результат $x^2=16/9$, откуда $x=4/3$ или $x=-4/3$. Проверка показывает, что корнем является лишь один $x=-4/3$.

120. $\{11/6\}$. Указание. Областью определения левой части уравнения является отрезок $[7/5;\ 5/2]$, поэтому $7/5<a/6<5/2$, т. е. $9<a<15$.

121. $[2;\ +\infty[$. **122.** $]-\infty;\ -1]\cup[2;\ +\infty[$. **123.** $]1/2;\ 2]$. **124.** $]3/4;\ 2[$. **125.** $[0;\ 2[\cup]9;\ +\infty[$. **126.** $]4;\ 6]$. **127.** $]-1-\sqrt{5};\ -3]\cup[1;\ \sqrt{5}-1[$. **128.** $]-6/5;\ -1]\cup[2;\ 3[$. **129.** $]-\infty;\ 1[$. Указание. Положите $\sqrt{2-x}=t$ и учтите, что $t\geqslant 0$. **130.** $]-\infty;\ -17/2]\cup[1;\ 10[$. **131.** $]6;\ 8]$. **132.** $]-1/2;\ +\infty[$. **133.** $[1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.

134. $[-18;\ -2[$. Указание. Неравенство $\sqrt{f(x)}<\varphi(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)>0, \\ f(x)<\varphi^2(x). \end{cases}$$

135. $]3;\ 24/5]$. 136. $[20/9;\ 4[\cup]5;\ +\infty[$. 137. $](1+\sqrt{29})/2,\ +\infty[$. 138. $]5;\ +\infty]$. 139. $]3;\ +\infty[$. 140. $]1/2;\ 5/2[$. 141. $]3;\ +\infty[$. 142. $[1;\ 6]$. 143. $[0;\ 2]$. 144. $[5/2;\ 3[$. 145. $]2/3;\ +\infty[$. 146. $]-\infty;\ -2]\cup[5;\ 74/13[$. 147. $[-2;\ -8/5[\cup]0;\ 2]$. 148. $[0,\ 3]$. 149. $[-1;\ 0[\cup]3/5;\ 1]$. 150. $[-2;\ -8/5[\cup\cup]0;\ 2]$. 151. $]-\infty;\ -2[$.

152. $]-\infty;\ 1[$. Указание. Неравенство $\varphi(x) < \sqrt{f(x)}$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ \varphi^2(x) < f(x). \end{cases}$$

153. $]-33;\ 3[$. 154. $]-\infty;\ -1]$. 155. $[-7;\ 1[$. 156. $[2;\ (7+\sqrt{5})/2[$. 157. $[-14;\ 2[$. 158. $]-\infty;\ 3[$. 159. $]4;\ 5[$. 160. $]-\infty;\ 2[$. 161. $[-2;\ 2[$. 162. $]-\infty;\ +\infty[$. 163. $]24/19;\ +\infty[$. 164. $]-\infty;\ -3]$. 165. $[2;\ +\infty[$. 166. $]-\sqrt{5};\ 2[$. 167. $[-1;\ (\sqrt{5}-1)/2[$. 168. $]8/3;\ +\infty[$. 169. $]-\infty;\ -2]\cup\cup]2;\ +\infty[$. 170. $\varnothing$. 171. $]-\infty;\ -5]\cup[1;\ +\infty[$. 172. $]-\infty;\ -3]\cup\cup]-2;(\sqrt{13}-7)/6[$. 173. $]-\infty;\ 1]\cup[2;(17+\sqrt{13})/6[$. 174. $](5-\sqrt{13})/6;+\infty[$. 175. $]1;\ 4]$. 176. $[-2;\ (\sqrt{5}-15)/10[$. 177. $[-6;\ \sqrt{2}-4[$. 178. $]3;\ 5]$. 179. $]1;2\sqrt{3}/3]$. 180. $[-1-\sqrt{13};0]\cup[(1+\sqrt{17})/2;\ \sqrt{13}-1]$. 181. $[-\sqrt{3};0[\cup\cup]0;\ 2]$. 182. $[0;\ 1]\cup[4;\ 16]$. 183. $[3;\ 4[\cup]7;\ +\infty[$. 184. $[-4;\ (3-\sqrt{21})/2[\cup\cup]1;\ +\infty[$. 185. $[1/2;\ 2[\cup]5;\ +\infty[$. 186. $[-20;\ 0[\cup]5;\ +\infty[$. 187. $]-\infty;\ -4[\cup\cup[1/2;\ 8/7[$. 188. $]-2-2\sqrt{6};\ -1[\cup[-2+2\sqrt{6};\ 3]$. 189. $](\sqrt{13}-5)/2;\ 1]$. 190. $[-1;\ -\sqrt{3}/2[\cup]\sqrt{3}/2;\ 1]$. 191. $]1;\ +\infty[$. 192. $]4;\ +\infty[$. 193. $[-3;\ 1[$. 194. $[-1;\ -\sqrt{15}/4[\cup]\sqrt{15}/4;\ 1]$. 195. $[-2;\ +\infty[$. 196. $[(16+\sqrt{7})/2;\ 10]$. 197. $[1;\ 3/2[$. 198. $]2\sqrt{21}/3;\ +\infty[$. 199. $]-2;\ -1]\cup[-2/3;\ 1/3[$. 200. $[1;\ +\infty[$. 201. $[-5;\ 2\sqrt{\sqrt{5}-2}-4[$.

202. $[-1/2;\ 0[\cup]0;\ 1/2]$. Указание. Областью определения неравенства является множество чисел $[-1/2;\ 0[\cup]0;\ 1/2[$. Преобразуйте неравенство к виду

$$\frac{1-(1-4x^2)}{x(1+\sqrt{1-4x^2})} < 3, \quad \text{или} \quad \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3,$$

или $4x < 3+3\sqrt{1-4x^2}$ и докажите, что это полученное неравенство выполняется во всей области определения.

203. $[\sqrt[3]{5/4};\ +\infty[$. 204. $[-1;\ +\infty[$, если $a\in]-\infty;\ 0]$; $\left[-1;\ \frac{1}{a^2}-1\right[$, если $a\in]0;\ +\infty[$. 205. $]-\infty;\ 2]$, если $a\in]-\infty;\ -1]$; $\left]2-\frac{1}{(a+1)^2};\ 2\right]$, если $a\in]-1;\ +\infty[$. 206. $]-\infty;0[\ \cup\ [1;\ +\infty[$. 207. $]-\infty;0]\ \cup\ ]9/2;\ +\infty[$. 208. $]-(3+\sqrt{29})/10;\ 2]$. 209. $\{5\}\cup]4+\sqrt{2};\ +\infty[$. 210. $[-1;\ \sqrt[3]{4}[$. 211. $[-2;\ 2[$. 212. $]1;\ 5/4[\ \cup\ ]5/3;\ +\infty[$. 213. 2.
214. 13. 215. $x=2$.

§ 7

1. $\{(0;\ 1)\}$. 2. $\{(-5;\ 2),\ (-2;\ -1)\}$. Решение. Нужно рассмотреть два возможных случая: 1) $y\leqslant 0$, 2) $y > 0$.

1) При $y \leqslant 0$ заданная система уравнений равносильна системе, состоящей из двух уравнений и одного неравенства

$$\begin{cases} x-3y=1, \\ x+y=-3, \\ \quad y \leqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=1, \\ x+y=-3, \end{cases}$$

получаем $x=-2$, $y=-1$. Это решение удовлетворяет неравенству $y \geqslant 0$ и, таким образом, является решением системы (1).

2) При $y > 0$ заданная система уравнений равносильна системе, состоящей из двух уравнений и одного неравенства

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ x+y=-3, \\ \quad y > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ x+y=-3, \end{cases}$$

получаем: $x=-5$, $y=2$. Это решение удовлетворяет неравенству $y > 0$ и, таким образом, является решением системы (2).

3. $\{(2;\ 3)\}$. 4. $\{(0;\ -1)\}$. 5. $\{(0;\ 3),\ (4;\ 1)\}$ **6.** $\{(1/4;\ 7/4),\ (3/4;\ 5/4)\}$. **7.** $\{(4/7,\ 5/7),\ (8/7;\ 3/7)\}$. **8.** $\{(-11/19;\ 23/19),\ (1;\ -1)\}$. **9.** $\{(24/25;\ 23/25)\}$.

10. $\{(c;\ 4-c)\}$, если $c \in [1,\ 2]$; $\{(c;\ c+2)\}$, если $c \in [0;\ 1]$; $\varnothing$ при остальных значениях c. Решение. При $x \leqslant 1$ заданная система уравнений равносильна системе двух уравнений и одного неравенства

$$\begin{cases} |y-2|=x, \\ y=2+x, \\ x<1. \end{cases} \qquad (1)$$

Если $y < 2$, то система уравнений (1) запишется в виде

$$\begin{cases} y=2-x, \\ y=2+x, \\ x<1, \\ y<2. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) не имеет решения, так как решение системы двух первых уравнений $x=0$, $y=2$ не удовлетворяет неравенству $y < 2$.

Если $y \geqslant 2$, то система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} y=2+x, \\ y=2+x, \\ x<1, \\ y \geqslant 2. \end{cases} \qquad (3)$$

Пара чисел $x=c$, $y=2+c$ при любом $c < 1$ является решением системы (1), а следовательно, и заданной системы уравнений.

При $x > 1$ заданная система уравнений равносильна системе двух уравнений и одного неравенства

$$\begin{cases} |y-2|=2-x, \\ y=4-x, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \qquad (4)$$

При $y<2$ система (4) запишется в виде

$$\begin{cases} y=x, \\ y=4-x, \\ x\geqslant 1, \\ y<2. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) не имеет решений, так как решение системы двух первых уравнений $x=2$, $y=2$ не удовлетворяет неравенству $y<2$.

Если $y\geqslant 2$, то система (4) запишется в виде

$$\begin{cases} y=4-x, \\ y=4-x, \\ x\geqslant 1, \\ y\geqslant 2. \end{cases} \qquad (6)$$

Пара чисел $x=c$, $y=4-c$ при любом $c\in[1;\ 2]$ и только при этих c является решением системы (6), а следовательно, и заданной системы уравнений.

11. $\{(1;\ 1;\ 0).\}$ **12.** $\{(2;\ 1;\ 1)\}$. **13.** $\{(2;\ 3;\ 1)\}$.

14. $\{(1;\ 5);\ (5;\ 1);\ (2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$. Решение. Полагаем $x+y=u$, $xy=v$. Тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u+v=11, \\ uv=30, \end{cases}$$

решения которой $u=5$, $v=6$ и $u=6$, $v=5$. Тогда относительно x и y получим две системы

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$$

решениями первой системы будут (5; 1) и (1; 5), решениями второй системы будут (2; 3) и (3; 2). Решения найдены с использованием теоремы Виета.

15. $\{(4;\ -1);\ (-1;\ 4)\}$. **16.** $\{(5;\ 3)\}$. **17.** $\{(-5;\ -4);\ (4;\ 5)\}$.

18. $\{(4;\ 5),\ (5;\ 4)\}$. **19.** $\{(1;\ 6),\ (6;\ 1)\}$.

20. $\{(-6;\ -2),\ (-4;\ -4)\}$. **21.** $\{(3;\ 2),\ (2;\ 3)\}$. **22.** $\{(-3;\ -2),\ (3;\ 2)\}$. **23.** $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$. **24.** $\varnothing$. **25.** $\{(5;\ 1)\}$. **26.** $\{(-5;\ -1),\ (5;\ 1)\}$. Указание. Положите $(x-y)/(x+y)=t$; тогда $(x+y)/(x-y)=1/t$. **27.** $\{(-2;\ -1),\ (2;\ 1),\ (-\sqrt{6};\ -\sqrt{6}/3),\ (\sqrt{6};\ \sqrt{6}/3)\}$. **28.** $\{(8/13;\ 12/5.)\}$ Указание. Введите новые неизвестные, положив $1/3x=u$, $1/2y=v$. **29.** $\{(11/13;\ -24/5)\}$. **30.** $\{(-7/4;\ -3),\ (-7/6;\ -2)\}$. **31.** $\{(-1;\ 9/4),\ (4;\ -9)\}$. **32.** $\{(-7;\ 3),\ (7/3;\ -1)\}$. **33.** $\{(-1;\ -3/2),\ (2;\ 3)\}$. **34.** $\{(4;\ -3),\ (4;\ 3)\}$. **35.** $\{(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2}),\ (-3\sqrt{2};\ \sqrt{2}),\ (3\sqrt{2};\ -\sqrt{2}),\ (3\sqrt{2};\ \sqrt{2})\}$. **36.** $\{(-6;-2),\ (6;2)\}$. **37.** $\{(-2;-3),\ (2;3)\}$. **38.** $\{(-2;-4),\ (-4;-2),\ (2;4),\ (4;2)\}$. **39.** $\{2;\ 8),\ (8;\ 2),\ (-2;\ -8),\ (-8;\ -2)\}$. **40.** $\{(-9/5;\ -16/5),\ (9/5;\ 16/5)\}$. **41.** $\{(-3;\ -2),\ (3;2)\}$. Указание. Сложив уравнения, получим $(x+y)^2=25$ и т. д. **42.** $\{(-10;\ -11),\ (10;\ 11)\}$. **43.** $\{(-7,\ -3),\ (7;\ 3)\}$.

44. $\{(7\sqrt{2/5};\ -3\sqrt{2/5}),\ (-7\sqrt{2/5};\ 3\sqrt{2/5})\}$. Указание. Умножив первое уравнение на 7, а второе на -3 и сложив полученные уравнения, находим $7y^2-4xy-3x^2=0$, откуда $y=x$ и $y=-3x/7$ и т. д.

45. $\{(-3;\ -2),\ (3;\ 2)\}$. **46.** $\{(-3;\ 4),\ (4;\ -3)\}$. **47.** $\{(-3;\ 4),\ (4;\ -3)\}$. **48.** $\{-1;\ -3),\ (3/2;\ 2),\ (-\sqrt{7}/2;\ 0),\ (\sqrt{7}/2;\ 0)\}$.

49. $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$. Указание. Сложив оба уравнения, получим квадратное относительно $x+y$ уравнение $(x+y)^2+(x+y)-12=0$.

50. $\{(-5-\sqrt{55};\ -5+\sqrt{55}),\ (-5+\sqrt{55};\ -5-\sqrt{55}),\ (4;\ 12),\ (12;\ 4)\}$.

51. $\{(-3; -5), (-5/3; -13/3), (5/3, 13/3), (3; 5)\}$. Указание. Вычтите из первого второе уравнение системы.

52. $\{(-4; -5), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (4; 5)\}$. Указание. Умножив первое уравнение на 5, а второе на 7, после сложения получите уравнение $5x^2-19xy+12y^2=0$, решая которое, найдете $x=3y$ и $x=\frac{4}{5}y$.

53. $\{(-1; -2), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (1; 2), (\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$.

54. $\{(1; 4), (4; 1), (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})\}$. Указание. Положите $x+y=u$, $\sqrt{xy}=v$.

55. $\{(1; -1), (3; -3), (\sqrt{157}-13; (\sqrt{157}-13)/2), (-13-\sqrt{157}; -(13+\sqrt{157})/2)\}$. Указание. Решая первое уравнение системы, получите $y=-x$ и $x=2y$.

56. $\{(2; -3), (c; 1) \mid c\in \boldsymbol{R}\}$. Решение. Умножив первое уравнение на -2 и сложив полученное уравнение со вторым уравнением системы, после упрощений получим уравнение $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-3$. При $y=1$ оба уравнения системы выполняются тождественно при всех $x\in \boldsymbol{R}$. При $y=-3$ $x=2$.

57. $\{(-1; 3), (c; 2) \mid c\in \boldsymbol{R}\}$. **58.** $\{(2; -1), (-1; c) \mid c\in \boldsymbol{R}\}$.

59. $\{(2; 3), (3; 2)\}$. Указание. Учитывая, что $x+y=5$, преобразуем первое уравнение системы $(x+y)(x^2-xy+y^2)=35$ к виду $x^2-xy+y^2=7$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=5. \end{cases}$$

60. $\{(-1; -2), (2; 1)\}$. **61.** $\{(-1; 2); (2; -1)\}$. Указание. Умножьте второе уравнение на 3 и сложите с первым уравнением системы. **62.** $\{(4; 8), (8; 4)\}$. **63.** $\{(-3; -1), (-1; -3), (1; 3), (3; 1)\}$. Указание. Из второго уравнения системы находим: $y=3/x$; исключая y из первого уравнения системы, получаем квадратное уравнение относительно x^4.

64. $\{(2; -1), (-1; 2)\}$. Указание. Положите $x^3=u$, $y^3=v$.

65. $\{(-3; -2), (-2; -3), (2; 3), (3; 2)\}$. Указание. Из первого уравнения системы находим $x^2+y^2=78/xy$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат и учитывая второе уравнение системы, получаем $97+2(xy)^2=78^2/(xy)^2$.

66. $\{(-3; -2), (-2; -3), (2; 3), (3; 2)\}$. **67.** $\{(1; 3; 9), (9; 3; 1)\}$. **68.** $\{(12/7; 12/5; -12)\}$.

69. $\{(3; 3; 3)\}$. Решение. Сложив уравнения системы, получим

$$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0. \qquad (1)$$

Тройка (3; 3; 3) является решением уравнения (1). Проверка показывает, что она также является решением системы. (Заметьте: без проверки этого утверждать нельзя!) Покажем, что других решений система не имеет. Из первого уравнения системы имеем $y^3=9x^2-27x+27$. Дискриминант квадратного трехчлена $9x^2-27x+27$ отрицателен. Поэтому, если $(x_0; y_0; z_0)$ — решение системы, то $y_0^3>0$. Следовательно, $y_0>0$. Аналогично, из второго и третьего уравнений получаем $z_0>0$ и $x_0>0$. Из первого уравнения системы имеем

$$(y_0-3)(y_0^2+3y_0+9)=9x_0(x_0-3). \qquad (2)$$

Так как $x_0>0$ и $y_0^2+3y_0+9>0$, из (2) вытекает, что числа y_0-3 и x_0-3 не могут иметь разных знаков. Аналогично, из второго уравнения следует, что числа z_0-3 и y_0-3 тоже не могут иметь разных знаков. Таким образом, если $x_0>3$, то $y_0>3$ и $z_0>3$; если же $x_0<3$, то $y_0<3$ и $z_0<3$. Решение $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ системы является также решением уравнения (1), а для (1) ни $x_0>3$, $y_0>3$, $z_0>3$, ни $x_0<3$, $y_0<3$, $z_0<3$ не годятся. Значит, $x_0=3$, $y_0=3$, $z_0=3$.

70. $\{(-1;\ -1;\ -1)\}$. **71.** $\{(2;\ 2;\ 2)\}$.

72. $\{(-1;\ 2)\}$. **73.** $\{(1;\ 0;\ -1)\}$. **74.** $\{(1;\ -1)\}$. Решение. Данная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} y^2=2x/(1+x^2), \\ 2(x-1)^2+1+y^3=0. \end{cases} \tag{1}$$

Так как $2x/(1+x^2)\leqslant 1$ при всех $x\in R$, то из первого уравнения системы (1) следует $-1\leqslant y\leqslant 1$. Из второго уравнения системы следует $y\leqslant -1$. Значит, $y=-1$, $x=1$.

75. $\{(1;\ 1;\ 1),\ ((-5\pm\sqrt{11})/2;\ (10\mp\sqrt{11})/2;\ (4\mp\sqrt{11})/2)\}$. Указание. Прибавьте к третьему уравнению первое, умноженное на 2, и второе, умноженное на 3.

76. $\{(c;\ c)\}$, $c\in R$ при $a=0$; $\{(3a/2;\ 9a/2),\ (3a/4;\ -9a/4)\}$ при $a\neq 0$.
77. $\{(3;\ 0),\ (-1/3;\ -5/3)\}$.

78. $\{((4a-a^2)/(2a-4);\ (a-4)/(a-2))\}$, если $a\in[2/3;\ 3-\sqrt{5}]$; $\{((a^2-12a+8)/(6a-4);\ a/(3a-2))\}$, если $a\in]3-\sqrt{5};\ 2]$.

79. $\{(0;\ 1-2\sqrt{3})\}$ при $a=7-4\sqrt{3}$; $\{(0;\ 1+2\sqrt{3})\}$ при $a=7+4\sqrt{3}$. Решение. Данная система при $x\geqslant 0$ имеет вид

$$\begin{cases} ax+(a-1)y=2+4a, \\ 3x+2y=a-5, \end{cases} \tag{1}$$

ее решение $x=\dfrac{a^2-14a+1}{a-3}$, $y=-\dfrac{a^2-17a-6}{a-3}$. Так как $x\geqslant 0$, то $\dfrac{a^2-14a+1}{a-3}\geqslant 0$ при $\dfrac{(a-7+4\sqrt{3})(a-7-4\sqrt{3})}{a-3}\geqslant 0$; применяя метод интервалов, получим $a\in[7-4\sqrt{3};\ 3[\ \cup\ [7+4\sqrt{3};\ +\infty[$. При $x\leqslant 0$ данная система имеет вид

$$\begin{cases} ax+(a-1)y=2+4a, \\ -3x+2y=a-5, \end{cases} \tag{2}$$

ее решение $x=-\dfrac{a^2-14a+1}{5a-3}$, $y=\dfrac{a^2+7a+6}{5a-3}$. Так как $x\leqslant 0$, то $\dfrac{a^2-14a+1}{5a-3}\geqslant$ $\geqslant 0$; применяя опять метод интервалов, получим $a\in[7-4\sqrt{3};\ 3/5[\ \cup$ $\cup[7+4\sqrt{3};\ +\infty[$. Нам надо найти такие a, при которых заданная система имеет единственное решение, независимо от того, будут ли $x\geqslant 0$ или $x\leqslant 0$. Следовательно, нам надо найти такие a, при которых выполняются равенства

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-14a+1}{a-3}=-\dfrac{a^2-14a+1}{5a-3}, \\ -\dfrac{a^2-17a-6}{a-3}=\dfrac{a^2+7a+6}{5a-3}. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения получаем

$$(a^2-14a+1)\left(\frac{1}{a-3}+\frac{1}{5a-3}\right)=0 \Rightarrow \frac{(a-7-4\sqrt{3})(a-7+4\sqrt{3})6(a-1)}{(a-3)(5a-3)}=0,$$

т. е. значения x, найденные из систем (1) и (2), будут одинаковыми при $a=1$, $a=7-4\sqrt{3}$, $a=7+4\sqrt{3}$. Подставим найденные значения a во второе уравнение системы (3). При $a=1$ получим $-11=7$, что невозможно, т. е. данная система при $a=1$ имеет два решения $(6; -11)$ и $(6; 7)$. При $a=7-4\sqrt{3}$ получим в левой части $-\frac{(7-4\sqrt{3})^2-17(7-4\sqrt{3})-6}{7-4\sqrt{3}-3}=1-2\sqrt{3}$, а в правой $\frac{(7-4\sqrt{3})^2+7(7-4\sqrt{3})+6}{5(7-4\sqrt{3})-3}=1-2\sqrt{3}$, т. е. при $a=7-4\sqrt{3}$ заданная система имеет единственное решение $(0; 1-2\sqrt{3})$. При $a=7+4\sqrt{3}$ в левой части получаем $-\frac{(7+4\sqrt{3})^2-17(7+4\sqrt{3})-6}{7+4\sqrt{3}-3}=1+2\sqrt{3}$, а в правой $\frac{(7+4\sqrt{3})^2+7(7+4\sqrt{3})+6}{5(7+4\sqrt{3})-3}=1+2\sqrt{3}$, т. е. при $a=7+4\sqrt{3}$ заданная система имеет единственное решение $(0; 1+2\sqrt{3})$.

80. $\{((1-2a^2)/(1-a^2),\ a/(1-a^2))\}$, если $a\neq\pm1$; $\varnothing$, если $a=\pm1$.

81. $\{((a^2+1)/a^2;\ (a+1)/a^2)\}$, если $a\neq 0$; $\varnothing$, если $a=0$.

82. $\{(0; a)\}$, если $a\neq\pm1$; $\{(c+1; c)\mid c\in\boldsymbol{R}\}$, если $a=-1$; $\{(c, 1-c)\mid c\in\boldsymbol{R}\}$, если $a=1$.

83. $\{((1+a+a^2)/(1+a);\ -a/(1+a))\}$ при $a\neq\pm1$; $\{(c; 1-c)\mid c\in\boldsymbol{R}\}$ при $a=1$; $\varnothing$ при $a=-1$.

84. $a=3$. **85.** $a=-7$. **86.** $a=1/17$. **87.** $\{(11/5; 1/5)\}$, если $a=3$; $\varnothing$, если $a\neq 3$.

88. $\{((a-3)^2;\ \cos(a-2);\ 3)\}$, если $a\in[3;\ 2+\pi]$; $\varnothing$, если $a\notin[3;\ 2+\pi]$.

89. $\{(\log_2(a+1);\ 5;\ \sin(a+2))\}$, если $a\in]-1;\ (\pi-4)/2]$; $\varnothing$, если $a\notin]-1;\ (\pi-4)/2]$. **90.** $\{(\operatorname{arctg}(a-3)^2+\pi n;\ \pm\sqrt{a+1};\ 6)\mid n\in\boldsymbol{Z}\}$, если $a\in[-1;\ 3]$; $\varnothing$; если $a\notin[-1;\ 3]$.

91. $a\in[-1;\ 0[$. Решение. Данная система при $b\neq 2$ и $b\neq -2$ и при любых a и c имеет единственное решение $x=\frac{2ac^2+2c-bc+b}{4-b^2}$, $y=$ $=\frac{2c-2-abc^2-bc}{4-b^2}$. Если $b=2$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases}2x+2y=ac^2+c,\\ 2x+2y=c-1.\end{cases}$$

Чтобы эта система имела решения, должно выполняться условие $ac^2+c=c-1$, т. е. $ac^2=-1$. Рассматривая последнее соотношение как уравнение относительно c, замечаем, что оно разрешимо при любых $a\in]-\infty;\ 0[$. Если $b=-2$, то система имеет вид

$$\begin{cases}2x-2y=ac^2+c,\\ -2x+2y=c-1.\end{cases}$$

Чтобы эта система имела решения, должно выполняться условие $ac^2+c=-c+1$, т. е. $ac^2+2c-1=0$. Рассматривая последнее соотношение как уравнение относительно c, замечаем, что оно имеет решения, если $1+a\geqslant 0$, т. е. $a\in[-1;\ +\infty[$. Таким образом, при $a\in[-1;\ 0[$ всегда найдется такое c, что при любом значении b заданная система имеет по крайней мере одно решение.

92. $a\in[-(3\sqrt{2}+4)/8;\ (3\sqrt{2}-4)/8]$. Указание. При $b\neq\pm\sqrt{2}$ система имеет единственное решение. При $b=\sqrt{2}$ заданная система имеет решения при выполнении условия $ac^2\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)c+1=0$. Это уравнение относительно c имеет решения, если $a\in]-\infty;\ (3\sqrt{2}-4)/8]$. При $b=-\sqrt{2}$ система имеет решения при выполнении условия $ac^2\sqrt{2}+(\sqrt{2}+1)c-1=0$. Это уравнение относительно c имеет решение, если $a\in[-(3\sqrt{2}+4)/8;\ +\infty[$. Ср. с решением примера **91**.

93. Для любого $a\in]-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty[$. Указание. См. решение примера **91**.

94. Для любого $a\in]-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty[$. Указание. См. решение примера **91**.

95. При всех $k\in]-2;\ 2[\cup]2;\ 4[$.

96. При всех $b\in](35-\sqrt{1009})/6;\ (35+\sqrt{1009})/6[$.

97. При всех $n\in]-(2+\sqrt{22})/6;\ 0[\cup](\sqrt{22}-2)/6;\ 9/4[$.

98. При всех $a\in]0;\ 5[$.

99. $\{(9a+54;\ a^3-36a)\}$ при $a\neq 6$, $a\neq 12$; $\{(8c;\ c)\mid c\in R\}$ при $a=12$; $\varnothing$ при $a=6$; $x+y>0$, где $x=9(a+6)$, $y=a(a-6)(a+6)$ при $a\in]-6;\ 3[\cup\ \cup]3;\ 6[\cup]6;\ 12[\cup]12;\ +\infty[$.

100. $x_{\text{наиб.}}=3$. **101.** а) $\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 11\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. **102.** $\{(6;\ 10),\ (10;\ 6)\}$.
103. $\{(1;\ 4),\ (4;\ 1)\}$. Указание. Решите первое уравнение системы, положив $\sqrt{x/y}=t$. **104.** $\{(5/3;\ 1/3)\}$.

105. $\{(-\sqrt{15/17};\ -4\sqrt{15/17}),\ (-4\sqrt{15/17},\ -\sqrt{15/17}),\ (\sqrt{15/17};\ 4\sqrt{15/17}),\ (4\sqrt{15/17};\ \sqrt{15/17})\}$. **106.** $\{(-9;\ -9/4),\ (4;\ 1)\}$.
107. $\{(-6;\ -1),\ (-3;\ 2),\ (9;\ -4)\ (2;\ 3)\}$. **108.** $\{(12;\ 4)\}$. **109.** $\{(-1;\ -27),\ (27;\ 1)\}$.
110. $\{(1;\ 8),\ (8;\ 1)\}$. **111.** $\{(1;\ 27),\ (27;\ 1)\}$. **112.** $\{(1;\ 81),\ (81;\ 1)\}$.
113. $\{(-9;\ 25),\ (5;\ 4)\}$. **114.** $\{(1;\ 4),\ (4;\ 1)\}$.

115. $\{(5;\ 4)\}$. Указание. Умножьте левые и правые части уравнений системы.

116. $\{(-2;\ -1),\ (-1;\ -2),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1),\ (0;\ c)\mid c\in R\}$.

117. $\{(-\sqrt{59}/2;\ -3/2),\ (-\sqrt{59}/2;\ 3/2),\ (5/\sqrt{2};\ 3/\sqrt{2}),\ (5/\sqrt{2};\ -3/\sqrt{2})\}$. Указание. Рассмотрите два случая: 1) $x+y>0$, $x-y\geqslant 0$; 2) $x+y<0$, $x-y\leqslant 0$.

118. $\{(1;\ 8),\ (8;\ 1)\}$. **119.** $\{(2;\ 2)\}$. **120.** $\{(4;\ 2),\ (4/3;\ -2/3)\}$. **121.** При $a=1/3$ и всех $a<0$. **122.** $]-7/2;\ 0[$. **123.** $x=8$. **124.** $x=1$. **125.** 0; 1.
126. $[-1;\ 7/3]$. **127.** $\alpha_1=0$; $\alpha_2=1$.

128. $a\in[-2/3;\ 0[$. Решение. Так как $a<0$ по условию задачи, а $ax>0$, то $x<0$. В правой части первого неравенства стоит $3a-x>2\sqrt{ax}>0$, следовательно, $x<3a$. Аналогично из второго неравенства $x-(6/a)>\sqrt{x/a}$ видим, что $6/a<x$. Решаем первое неравенство:

$$2\sqrt{ax}<3a-x\Longrightarrow x^2-10ax+9a^2>0\Longrightarrow x\in]-\infty;\ 9a[\cup]a;\ 0[;$$

но мы установили, что $x<3a$, следовательно, $x\in]-\infty;\ 9a[$. Решаем второе неравенство:

$$x-\sqrt{\frac{x}{a}}>\frac{6}{a}\Longrightarrow x-\frac{6}{a}>\sqrt{\frac{x}{a}}\Longrightarrow x^2-\frac{13}{a}x+\frac{36}{a^2}>0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\in]-\infty;\ 9/a[\cup]4/a;\ 0[;$$

но мы установили, что для второго неравенства $x>6/a$, следовательно, $x\in]4/a;\ 0[$. Чтобы оба неравенства имели общие решения, интервалы

$]-\infty, 9a[$ и $]4/a; 0[$ должны иметь общие точки, т. е. $4/a \leqslant 9a \Rightarrow 4/9 \geqslant a^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow -2/3 \leqslant a < 0$. Таким образом, при $a \in [-2/3; 0[$ два заданные неравенства при $a < 0$ имеют общие решения.

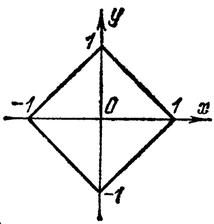
129. Все $k \in]-\infty; 1/2[\cup]3/2; +\infty[$. **130.** Все $k \in [-1; +\infty[$. **131.** $]1/3; 6[$. **132.** $[0; 1/2]$. **133.** $]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$. **134.** $[3; 4[$. **135.** $]-1; 1/2[$. **136.** $]-\infty; -(3+\sqrt{5})/2] \cup]0; 6]$. **137.** $[2/3; (3+\sqrt{5})/6[$. **138.** $]-2; -1] \cup [1; 4[$. **139.** $]-1; 2[$. **140.** $]-2; 0]$. **141.** $]-2; 1[$. **142.** а) $x=1$; $y=1$; б) да; в) нет. **143.** При всех $a \in]-(1+\sqrt{13})/2; -2[$.

144. $a < -1$. Решение. Предположим сначала, что данная система имеет решения. Тогда имеет решения и неравенство, полученное сложением первого неравенства данной системы, умноженного на -2, и второго ее неравенства: $(x+3y)^2 \leqslant -4/(a+1)$. Значит, $a+1 < 0$, $a < -1$. Пусть теперь $a_0 < 1$. Тогда $(1-a_0)/(a_0+1) < -1$. Поэтому, если имеет решения система уравнений

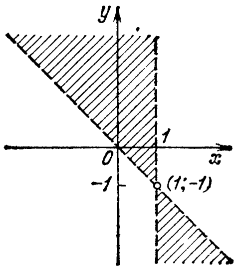
$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1, \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2, \end{cases} \qquad (1)$$

то имеет решения и данная система неравенств. Но система (1) имеет решение — например, $(-3/2; 1/2)$. (Найти указанное решение можно, умножив первое уравнение на -2 и сложив со вторым.)

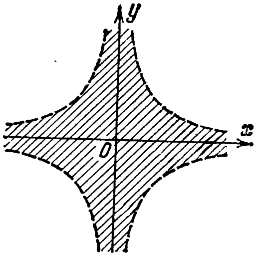
145.



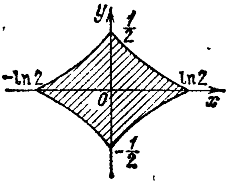
146.



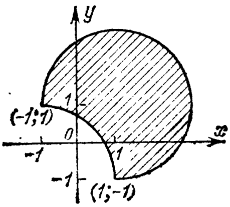
147.



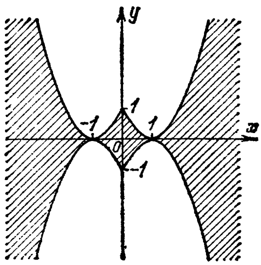
148.



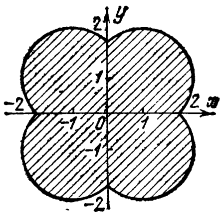
149.



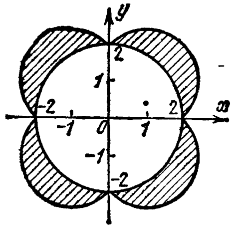
150.



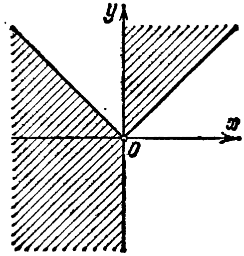
151.



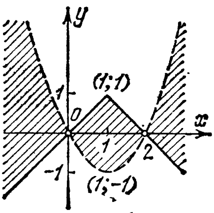
152.



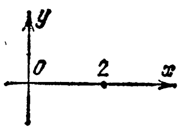
153.



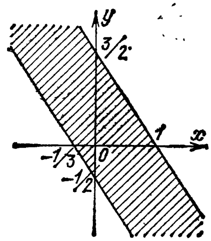
154.



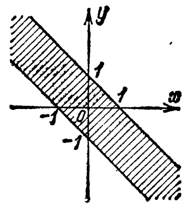
155.



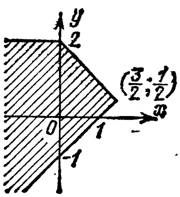
156.



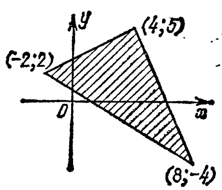
157.



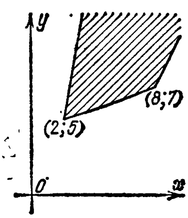
158.



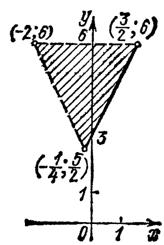
159.



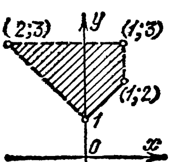
160.



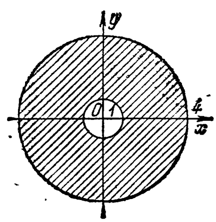
161.



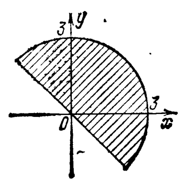
162.



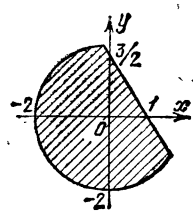
163.



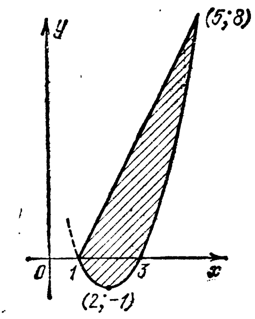
164.



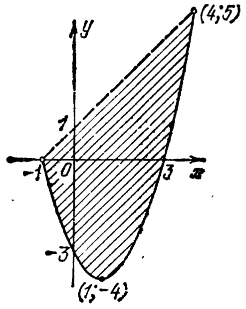
165.



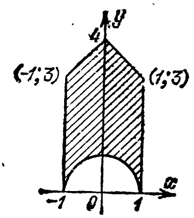
166.



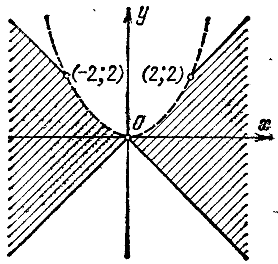
167.



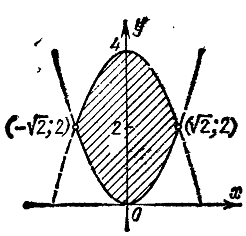
168.



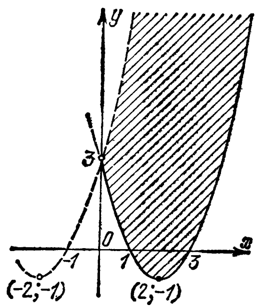
169.



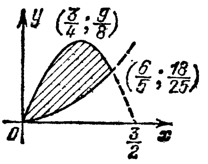
170.



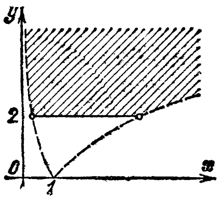
171.



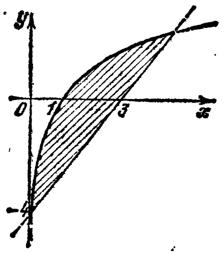
172.



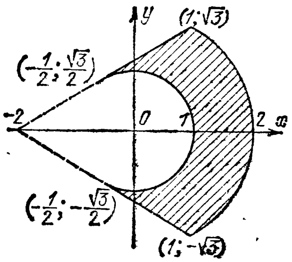
173.



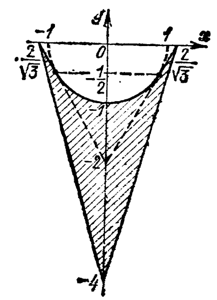
174.



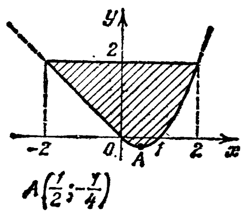
175.



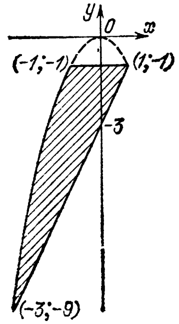
176.



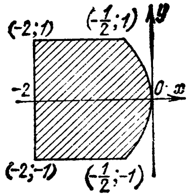
177.



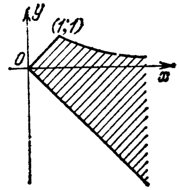
178.



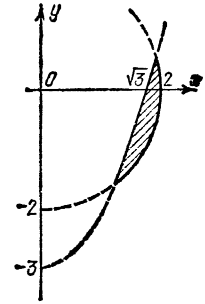
179.



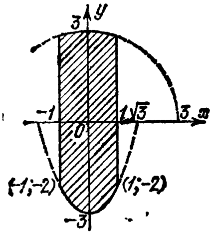
180.



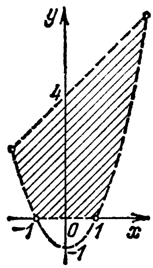
181.



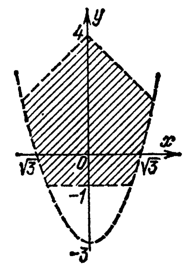
182.



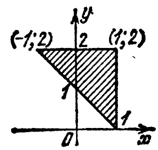
183.



184.



185.



§ 8

1. $D(y)=[0;\ 2]$. **2.** $D(y)=[-1;\ 1]$. **3.** $D(y)=[1;\ 6]$. **4.** $D(y)=]-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty[$. **5.** $D(y)=[-3;\ 5[$. **6.** $D(f)=[-1;\ 2]$. **7.** $D(y)=[-1/2;\ 3/2]$. **8.** $D(y)=[-2/3;\ 3]$. **9.** $D(y)=[-2;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. **10.** $D(y)=]-\infty;\ -1/2[\cup]3;\ +\infty[$. **11.** $D(f)=]-\infty;\ -2]\cup[0;\ 2]$. **12.** $D(f)=]-\infty;\ -\sqrt{3}]\cup[0;\ \sqrt{3}]$. **13.** $D(y)=]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. **14.** $D(y)=]-4;\ 1]$. **15.** $D(y)=[7/3;\ 63[\cup]63;\ +\infty[$. **16.** $[-3;\ 0[\cup]0;\ 2[\cup]2;\ 4]$. **17.** $D(y)=]-\infty;\ 0[\cup[2;\ 3]$. **18.** $D(f)=]-\infty;\ -4]\cup[5;\ 6]$. **19.** $D(f)=]-\infty;\ -3]\cup]2;\ +\infty[$. **20.** $D(y)=]-3;\ 3[\cup]3;\ 4]$. **21.** $D(y)=[-2;\ 1[\cup]1;\ 2]$. **22.** $D(y)=]-3;\ 1]$. **23.** $D(y)=]-\infty;\ 3/4[\cup]4;\ 7]$. **24.** $D(y)=]-\infty;\ -1[\cup[4;\ +\infty[$. **25.** $D(y)=]-\infty;\ -4[\cup]-2;\ 2]\cup[3;\ +\infty[$. **26.** $D(y)=\{1\}$. **27.** $D(y)=]-\infty;\ -4]\cup]7;\ +\infty[$. **28.** $D(y)=[5;\ 7[$. **29.** $D(y)=[-2;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ 3]$. **30.** $D(f)=]-\infty;\ +\infty[$. **31.** $D(y)=]-\infty;\ 0]$. **32.** $D(f)=\{[\pi n;\ \pi(2n+1)/2]\mid n\in \mathbf{Z}\}$. **33.** $D(y)=]-1/6;\ \pi/3]\cup[5\pi/3;\ 6[$. **34.** $D(y)=\left\{\left]\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{13}{6}\pi+2\pi n\right[\ \middle|\ n\in \mathbf{Z}\right\}$. **35.** $D(y)=]3;\ 30[\cup]30;\ +\infty[$. **36.** $D(y)=[-5;\ 8[\cup]8;\ 9[$. **37.** $D(f)=[4;\ 11/2[\cup]11/2;\ +\infty[$. **38.** $D(y)=]-\infty;\ -2[\cup]2;\ +\infty]$. **39.** $D(y)=]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ +\infty[$. **40.** $D(y)=[0;\ +\infty[$. **41.** $D(y)=]-\infty;\ -7[\cup]-1;\ +\infty[$ **42.** $D(y)=]-1;\ 1[$. **43.** $D(y)=[-1;\ 1[$. **44.** $D(y)=]-5;\ 0[\cup]3;\ +\infty[$. **45.** $D(y)=]2;\ 4]$. **46.** $D(y)=[1;\ +\infty[$. **47.** $D(f)=]2;\ +\infty[$. **48.** $D(y)=[1;\ +\infty[$. **49.** $D(y)=]0;\ 1[$. **50.** $D(y)=]0;\ 3/2]$. **51.** $D(y)=]-3;\ -2/3]$. **52.** $D(f)=[0;\ +\infty[$. **53.** $D(y)=]-\infty;\ -11[\cup]-11;\ -10[\cup]-10;\ -9[\cup]-9;\ 2]\cup[3;\ +\infty[$.

54. $D(y)=]9; -\infty[$. 55. $D(y)=[1; 4]$. 56. $D(y)=[5; +\infty[$. 57. $D(f)=[-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 2]$. 58. $D(y)=]-3; -2/5[\cup]2; +\infty[$. 59. $D(y)=]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[$. 60. $D(y)=]1; 4]$. 61. $D(y)=]1; 4[$. 62. $D(y)=]1; +\infty[$. 63. $D(y)=]0; 1[$. 64. $D(y)=[2; 3]$. 65. $D(y)=[-5; -3[\cup]3; 5]$. 66. $D(y)=]1; 6[\cup]6; +\infty[$. 67. $D(f)=]-2; (1-\sqrt{21})/2]\cup[(1+\sqrt{21})/2; 3[$. 68. $D(y)=[2; 4[$. 69. $D(f)=]-\infty; -2[$. 70. $D(y)=[(1-\sqrt{5})/2; 0[\cup [(1+\sqrt{5})/2; +\infty[$. 71. $D(f)=]-\infty; -7] \cup]-3; +\infty[$. 72. $D(y)=]8/3; +\infty[$. 73. $D(f)=]-\infty; -2] \cup]1; 2]$. 74. $D(y)=[-1; 1[\cup]3; 5]$. 75. $D(f)=[0; 1[$. 76. $]-\infty; (1-\sqrt{65})/4[\cup[0; (1+\sqrt{65})/4[$. 77. $D(f)=]0; 16]$. 78. $D(y)=[1; 2[\cup]2; 5]$. 79. $D(y)=]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$. 80. $D(y)=]1; 3]$. 81. $D(y)=[3; +\infty[$. 82. $D(f)=]2; +\infty[$. 83. $D(f)=]5; +\infty[$. 84. $D(f)=[3; +\infty[$. 85. $D(y)=]-\infty; -1[\cup]-1; 4[$. 86. $D(y)=[1; 2[\cup]2; 3]$. 87. $D(y)=]-\infty; -1/2] \cup [0; 1]$. 88. $D(y)=[4; 5[\cup]5; 39[$. 89. $D(y)=]2; 3[$. 90. $D(y)=]1/3; +\infty[$. 91. $D(y)=[10^3; 10^4[$. 92. $D(y)=[4-\sqrt{2}; 3[\cup [4+\sqrt{2}; +\infty[$. 93. $D(y)=]100; +\infty[$. 94. $D(y)=]0; 10^{-2}[\cup]10^{-2}; 10^{-1/2}[$. 95. $D(y)=]0; 1[$. 96. $D(y)=]-\infty; -5[\cup]-5; -4[\cup]4; 5[\cup]5; +\infty[$. 97. $D(y)=[-4; -\pi] \cup [0; \pi]$. 98. $D(y)=]0; 10^2[\cup]10^3; +\infty[$. 99. $D(y)=]-\infty; -5/3[\cup]1; +\infty[$. 100. $D(y)=]3-2\pi; 3-\pi[\cup]3; 4]$. 101. $D(y)=]9; +\infty[$. 102. $D(y)=[1; 4[$. 103. $D(y)=[-1; 3]$. 104. $D(y)=]-1/2; 1/2[\cup]1/2; 1[\cup]3/2; +\infty[$. 105. $D(y)=]0; 10^{-2}[\cup]10^{-2}; 10^{-1}[$. 106. $D(y)=\{1/2\}$. 107. $D(y)=\{[2\pi n; \pi(2n+1)] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

108. $D(y)=\{[2\pi n+\arcsin(1/3); \pi(2n+1)-\arcsin(1/3)] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

109. $D(y)=\{[4\pi n; 2\pi(2n+1)] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

110. $D(y)=\{]\pi(2n-1)+\arccos(1/4); \pi(2n+1)-\arccos(1/4)[\mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

111. $D(y)=\{[\pi(6n-1)/3; \pi(6n+1)/3] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

112. $D(y)=\{\pi(4n+1)/2 \mid n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{[\pi(2m+1); 2\pi(m+1)] \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$.

113. $D(y)=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $E(y)=\{-1; 1\}$. 114. $D(f)=[0; 1]$, $E(f)=[0; 1/2]$. 115. $D(y)=]-\infty; +\infty[$, $E(y)=[\sqrt{11/3}; +\infty[$. 116. $D(y)=]-\infty; +\infty[$, $E(y)=[\lg(11/3); +\infty[$. 117. $D(y)=]-\infty; +\infty[$, $E(y)=[\lg(4/5); +\infty[$. 118. $D(f)=[1; 3]$, $E(f)=[\sqrt{2}; \sqrt{10}]$. 119. $D(f)=]-\infty; +\infty[$, $E(f)=[1; 2]$. 120. $D(f)=[-1; 2]$, $E(f)=[\sqrt{3}; \sqrt{6}]$. 121. $x\in]-3; 2]$.

122. $a \in]-\infty; -1/4[$. Решение. Пусть $-k \in [-1; -1/3]$. Если в некоторой точке x функция $y=-k\,(1/3\leqslant k\leqslant 1)$, то

$$\frac{x-1}{a-x^2+1}=-k \Rightarrow \frac{x}{k}-\frac{1}{k}=-a+x^2-1 \Rightarrow x^2-\frac{1}{k}x-a-1+\frac{1}{k}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2k}\pm\sqrt{\frac{1}{4k^2}-\frac{1}{k}+1+a} \Rightarrow x=\frac{1}{2k}\pm\sqrt{\left(1-\frac{1}{2k}\right)^2+a}.$$

Следовательно, чтобы функция не содержала ни одного значения из отрезка $[-1; -1/3]$, необходимо, чтобы $((2k-1)/2k)^2+a<0$ при любом $k\in[1/3; 1]$, т. е. $a<-((2k-1)/2k)^2$. Функция $-((2k-1)/2k)^2$ при $2k-1=0$, т. е. при $k=1/2$, принимает свое наибольшее значение 0; наименьшие значения на отрезке $1/3\leqslant k\leqslant 1$ эта функция принимает на концах отрезка: при $k=1$ и $k=1/3$ имеем $-((2k-1)/2k)^2=-1/4$. Следовательно, при любых $a\in]-\infty; -1/4[$ множество значений заданной функции не содержит ни одного значения из отрезка $[-1; -1/3]$.

123. $a \in]-\infty; -1[\cup]-1; 5/4]$. Решение. При $a=-1$ функция принимает вид $y=(x-1)/(x^2-1)$. Она определена всюду, кроме точек $x=\pm 1$. Если исключить из рассмотрения эти точки, то можно переписать функцию в виде $y=1/(x+1)$. Эта функция может принимать любые значения, кроме $y=0$. Следовательно, функция $y=(x+1)/(a+x^2)$ при $a=-1$ не может принимать значения $y=0$. Если $a<0$ и $a \neq -1$, то при $x \to \pm\sqrt{|a|}$ значение $y \to \pm\infty$. Рассмотрим функцию $y=(x+1)/(a+x^2)$ на участке $[-1; -|a|[$, если $-1<-|a|$; на этом промежутке $x+1 \geqslant 0$, $x^2+a>0$ и, следовательно, $y \geqslant 0$. В точке $x=-1$ функция $y=0$, при возрастании x от -1 до $-|a|$ функция y возрастает от 0 до $+\infty$ и область значений функции содержит отрезок $[0; 1]$. Если $a<0$ и $-|a|<-1$, то на участке $]-|a|; -1]$ будут выполнены неравенства $x+1 \leqslant 0$, $x^2+a<0$, следовательно, $y \geqslant 0$ и при изменении x от -1 до $-|a|$ функция y возрастает от 0 до $+\infty$, следовательно, и в этом случае область значений функции содержит отрезок $[0; 1]$. Если $a \geqslant 0$, то функция $y=(x+1)/(x^2+a)$ принимает значения $\geqslant 1$ не при любых a. Найдем допустимые значения a. Потребуем, чтобы

$$(x+1)/(x^2+a) \geqslant 1 \Rightarrow x+1 \geqslant x^2+a \Rightarrow x^2-x+a-1 \leqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \left[(1-\sqrt{5-4a})/2; (1+\sqrt{5-4a})/2\right].$$

Следовательно, чтобы нашлись точки x, в которых $y \geqslant 1$, необходимо, чтобы $5-4a \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant 5/4$. Итак, при $x=-1$ функция $y=0$; далее при возрастании x функция y будет возрастать, причем если $a \leqslant 5/4$, то вершина графика функции будет находиться выше $y=1$, т. е. область значений функции содержит отрезок $[0; 1]$.

124. $a \in \varnothing$. Решение. $y(1)=0$ при всех a, за исключением таких a, при которых знаменатель равен нулю. При $x=1$ знаменатель обращается в нуль лишь при $a=0$. Но при $a=0$ $y=-(x-1)/(x^2-1)=-1/(x+1)$. Эта функция имеет значения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$. Таким образом, при всех a заданная функция имеет значения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

§ 9

1. $\{2\}$. **2.** $\{-1\}$. **3.** $\{-7/2; 2\}$. **4.** $\{2/7\}$. **5.** $\{2^{-1/2}\}$. **6.** $\{1\}$. **7.** $\{2\}$. **8.** $\{3\}$. **9.** $\{-1; 1\}$. **10.** $\{9/4; 3\}$. **11.** $\{1; 2\}$. **12.** $\{-2\}$. **13.** $\{0\}$. **14.** $\{3\}$. **15.** $\{0\}$. **16.** $\{-2\}$. **17.** $\{2\}$. **18.** $\{0\}$. **19.** $\varnothing$. **20.** $\{-2; 3\}$. **21.** $\{\log_{(\sqrt{5}-1)/2}(3/2)\}$. **22.** $\{10\}$. **23.** $\{2-\sqrt{7/2}; 2+\sqrt{7/2}\}$. **24.** $\{3/2\}$. **25.** $\{-1\}$. **26.** $\{0; 1/2\}$. **27.** $\{3\log_6 2; 3\}$. **28.** $\{2\}$. **29.** $\{3/2\}$. **30.** $\{1/5; 6\}$. **31.** $\{1/4\}$. **32.** $\{1\}$. **33.** $\{\pi(6n-(-1)^n)/18 \mid n \in Z\}$. **34.** $\{25\}$. **35.** $\{100\}$. **36.** $\{-1; 2\}$. **37.** $\{3/2\}$. **38.** $\{9\}$. **39.** $\{-2\}$. **40.** $\{1\}$. **41.** $\{-3/2; 4\}$. **42.** $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. **43.** $\{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$. **44.** $\{-3/2; -1\}$. **45.** $\{1\}$. **46.** $\{\operatorname{arctg} 10+\pi n \mid n \in Z\}$. **47.** $\{\log_3(2+\sqrt{11/3})\}$. **48.** $\{-2\}$. **49.** $[3; +\infty[\cup \{-1/2; 1/2\}$.

50. $\{3\}$. Решение. Так как данное уравнение содержит множитель $\sqrt[x]{8^{x-1}}$, то $x \in N$. Возводим правую и левую части уравнения в степень x; тогда после преобразований получим $5^{x^2} \cdot 2^{3x-3x}=5^{3x} \cdot 2^{2x}$. Прологарифмируем при основании 5 правую и левую части данного соотношения; после преобразования уравнение будет иметь вид $(x-3)(x+\log_5 2)=0$. Отсюда $x=3$ и $x=-\log_5 2$. Второе решение не удовлетворяет условию $-\log_5 2 \in N$ и, следовательно, решением будет только $x=3$.

З а м е ч а н и е. Если бы данное уравнение было записано в виде $5^x \cdot 8^{(x-1)/x}=500$, то $x \in \boldsymbol{R}$. В этом случае уравнение имело бы своими корнями и $x=3$, и $x=-\log_5 2$.

51. $\{\pi/9;\ 1;\ \pi(6k\pm 1)/9 \mid k\in \boldsymbol{N}\}$. 52. $\{10\}$. 53. $\{4\}$. 54. $\{1\}$. 55. $\{\pi(3k\pm 1)/3 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$. 56. $\{-2;\ 2\}$. 57. $\{1;\ 3\}$.

58. $\{1/9;\ 9\}$. Р е ш е н и е. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162 \Rightarrow 3^{\log_3^2 x}+(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}=162 \Rightarrow 3^{\log_3^2 x}+3^{\log_3^2 x}=162 \Rightarrow 3^{\log_3^2 x}=3^4 \Rightarrow \log_3^2 x=4 \Rightarrow \log_3 x=2$, или $\log_3 x=-2 \Rightarrow x=9$, или $x=-1/9$. 59. $\{-2;\ 4\}$. 60. $\{-1\}$. 61. $\{2\}$. 62. $\{6\}$. 63. $\{\pi(2k+1)/2 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$. 64. $\{9\}$. 65. $\{1/16;\ 1\}$. 66. $\{-1/2\}$.

67. $\{3\}$. З а м е ч а н и е. В данном примере $x \in \boldsymbol{N}$, поэтому второе полученное значение $x=3/\log_2 6$ является корнем уравнения $64^{1/x}-2^{(3x+3)/x}+12=0$; но не данного.

68. $\{10^{-2}\}$. 69. $\{1\}$.

70. $\{\log_3 2-1;\ 2\}$. Р е ш е н и е. $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29 \Rightarrow 3\cdot(3^x)^2-29\cdot 3^x+18=0 \Rightarrow 3(3^x-9)\left(3^x-\frac{2}{3}\right)=0$. Следовательно, $3^x=9 \Rightarrow x=2$ и $3^x=2/3 \Rightarrow x=\log_3 2-1$.

71. $\{100\}$. 72. $\{1;\ 3\}$. 73. $\{4\}$.

74. $\{10^{-1/2};\ 10^2\}$. Р е ш е н и е. Так как x—основание показательной функции, то $x>0$. Тогда

$$x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}} \Rightarrow 10^{\lg x-\frac{2}{3}(\lg x)^2}=10^{-2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lg^2 x-3\lg x-2=0 \Rightarrow 2(\lg x-2)\left(\lg x+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg x=2 \text{ или } \lg x=-1/2 \Rightarrow x=2 \text{ или } x=-1/2.$$

75. $\{1/3;\ 9\}$. 76. $\{1/10;\ 1000\}$. 77. $\{10;\ 10^5\}$. 78. $\{-5/2;\ 3\}$. 79. $\{-1;\ 1\}$. 80. $\{10^{-5};\ 10^3\}$. 81. $\{9\}$. 82. $\{5\}$. 83. $p\in\{0;\ 25/4\}$. 84. $]-\infty;\ 1/2[$. 85. $]-3/4;\ +\infty[$. 86. $]-\infty;\ 1/2[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. 87. $]2;\ +\infty[$. 88. $x \in \boldsymbol{R}$.

89. $x \in \varnothing$. Р е ш е н и е. Так как $x+1 \in \boldsymbol{N}$, то с учетом этого замечания имеем

$$\sqrt[x+1]{3}>9 \Rightarrow 3^{1/(x+1)}>3^2 \Rightarrow 1/(x+1)>2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}-2>0 \Rightarrow \frac{x+0{,}5}{x+1}<0 \Rightarrow x\in\ ]-1;\ -1/2[.$$

Таким образом, если задача имеет решения, то $x \in\ ]-1;\ -1/2[$, но x может быть равно только числам 0; 1; 2; ...; ни одно из этих чисел интервалу $]-1;\ -1/2[$ не принадлежит, следовательно, данное неравенство ни при каком $x \in \boldsymbol{N}_0$ не выполняется. З а м е ч а н и е. Если бы исходное неравенство было задано в виде $3^{1/(x+1)}>9$, то здесь $x \in \boldsymbol{R}$ и найденный выше интервал и был бы решением этого неравенства.

90. $]4/3;\ +\infty[$. 91. $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-1/2;\ +\infty[$. 92. $]0;\ 1[$. 93. $[1/2;\ 1[$. 94. $]-2;\ +\infty[$. 95. $]-5;\ 5[$. 96. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]\log_4 3;\ +\infty[$. 97. $x\in \boldsymbol{R}$. 98. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ [1;\ +\infty[$. 99. $]3;\ +\infty[$. 100. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. 101. $[(\log_2 3-2)/2;\ +\infty[$. 102. $]-\infty;\ 1-(\log_3 5)/3[$. 103. $]10^3;\ +\infty[$. 104. $]-\infty;\ 2]$. 105. $]0;\ +\infty[$. 106. $]0;\ +\infty[$. 107. $[0;\ 64[$. 108. $]-\infty;\ \log_{0,4} 2[$.

109. $]-\infty; -\log_5 10]$. **110.** $]10^{-2}; +\infty[$. **111.** $]-2; +\infty[$. **112.** $]-1/2; 0[$. **113.** $]0; \log_{2/3}(1/3)[$. **114.** $]-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}[$. **115.** $]2; 6[$. **116.** $[-1; 0]\cup\cup[2; 3]$. **117.** $]\log_2 3; +\infty[$. **118.** $]-\infty; \log_2 3]$. **119.** $]-\infty; -1[\cup]0; 2[$. **120.** $[\log_3(83/19); +\infty[$. **121.** $x\in]a^2\log_3^2 2; +\infty[$ при $a\in[0; +\infty[$; $x\in]0; +\infty[$ при $a\in]-\infty; 0[$. **122.** $]-\infty, \log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[1/2; +\infty[$. **123.** $]5/3; 2[$. **124.** $]1; 4[$. **125.** $\{1+\sqrt{3}\}$. **126.** $\{2\}$. **127.** $\{4\}$. **128.** $\{2\}$. **129.** $\{0\}$. **130.** $\{-5\}$. **131.** $\{1/3\}$. **132.** $\{0\}$. **133.** $\{3\}$. **134.** $\{3/2; 10\}$. **135.** $\{16/\sqrt[3]{5}\}$. **136.** $\{1\}$. **137.** $\{100\}$. **138.** $\{2+10^{-7}; 3; 102\}$. **139.** $\{-2-\sqrt{10}\}$. **140.** $\{10^{-1}; 10\}$. **141.** $\left\{\sqrt{10^{1-\sqrt{3}}}; \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}\right\}$. **142.** $\{10^{-5}; 10^3\}$. **143.** $\{3^{-\sqrt{2}}; 3^{\sqrt{2}}\}$. **144.** $\{1/5; 25\}$. **145.** $\{10^{-3}; 10^2\}$. **146.** $\{10^{-4}; 10\}$. **147.** $\{5\}$. **148.** $\{10^{-3}; 10\}$. **149.** $\{2; 16\}$. **150.** $\{10; 10^4\}$. **151.** $\{1/81; 1/3\}$. **152.** $\{\sqrt{5}; 5\}$. **153.** $\{1/4; 2\}$. **154.** $\{2^{\log_a b}; 3^{\log_a b}\}$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$. **155.** $\{\sqrt{10^{-9}}; 10\}$. **156.** $\{5\}$. **157.** $\{3+\sqrt{6}\}$. **158.** $\{-5\}$. **159.** $\{-4\}$. **160.** $\{-(3-\sqrt{3})/3; 8\}$. **161.** $\{1/9; 3\}$. **162.** $\{2^{-7}; 2\}$. **163.** $\{1/\sqrt{2}; 1; 4\}$. **164.** $\{7\}$. **165.** $\{-1; 0\}$. **166.** $\{2\}$. **167.** $\{1\}$. **168.** $\{1/16; 2\}$. **169.** $\{3\}$. **170.** $\{-9/5; 23\}$. **171.** $\{2\}$. **172.** $\{1/2; 128\}$. **173.** $\{1/\sqrt{10}; \sqrt[3]{10}\}$. **174.** $\{1\}$. **175.** $\{8\}$. **176.** $\{2\}$. **177.** $\{\sqrt[5]{5}; 5\}$. **178.** $\{10\}$. **179.** $\{9\}$. **180.** $\{4\}$. **181.** $\{2\}$. **182.** $\{3\}$. **183.** $\{3; 3+\sqrt{2}\}$. **184.** $\{16\}$. **185.** $\{10^{-5/3}; 10^2\}$. **186.** $\{48\}$. **187.** $\{10^{-\sqrt{3}}; 10^{\sqrt{3}}\}$. **188.** $\{13\}$. **189.** $\{29\}$. **190.** $\{1; 9\}$. **191.** $\{-3\}$. **192.** $\{\log_3 4\}$. **193.** $\{1/2\}$. **194.** $\{0\}$. **195.** $\{98\}$. **196.** $\{0\}$. **197.** $\{3\}$. **198.** $\{-1; 2\}$. **199.** $\{10\}$. **200.** $\{2\}$. **201.** $\{2\}$. **202.** $\{1/5\}$. **203.** $\{3\}$. **204.** $\{10^{-2}; 10^2\}$. **205.** $\{10^{-1}; 10\}$. **206.** $\{-2\}$. **207.** $\{2\}$. **208.** $\{2; 4\}$. **209.** $\{0\}$. **210.** $\{2^{-2/5}; 16\}$. **211.** $\{1/4; 1/2\}$. **212.** $\{1; 2\}$. **213.** $\{100\}$. **214.** $\{10^{-1}; 2; 10^3\}$. **215.** $\{10^{-2/3}; 10^{2/3}\}$. **216.** $\{13/4; 10\}$. **217.** $\{16\}$. **218.** $\{-13/20; 13/6\}$. **219.** $\{3^{(5+3\sqrt{5})/10}\}$. **220.** $\{10^{-3}; 10\}$. **221.** $\{0; 2\}$. **222.** $\{0; 7/4; (3+2\sqrt{6})/2\}$. **223.** $\{-17\}$.

224. $\{-1/4\}$. Решение. Основания логарифмов $3x+7$ и $2x+3$ должны быть больше нуля и отличны от 1. Тогда, учитывая сказанное,

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\log_{3x+7}(2x+3)^2+\log_{2x+3}(2x+3)(3x+7)=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+1+\log_{2x+3}(3x+7)=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+\frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)}-3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\log_{3x+7}(2x+3))^2-3\log_{3x+7}(2x+3)+1=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\log_{3x+7}(2x+3)-1)(2\log_{3x+7}(2x+3)-1)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\log_{3x+7}(2x+3)=1 \quad\text{или}\quad 2\log_{3x+7}(2x+3)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+3=3x+7 \quad\text{или}\quad (2x+3)^2=3x+7.$$

Первая из полученных возможностей приводит к $x=-4$, но при этом значении $2x+3=-5<0$, что противоречит условию $2x+3>0$. Вторая возможность дает $4x^2+9x+2=0$, откуда $x=-2$ или $x=-1/4$; но при $x=-2$ основание логарифмов $2x+3=-1<0$, что опять противоречит условию. Значение $x=-1/4$ удовлетворяет всем условиям.

225. $\{0\}$. **226.** $\{2; 3\}$. **227.** $\{2^{-2/3}; 8\}$. **228.** $\{\log_2(3/5); \log_2(2/5)\}$. **229.** $\{2\}$. **230.** $\{-\log_2 3\}$. **231.** $\{14\}$. **232.** $\{3; 10\}$. **233.** $\{1/12\}$.

234. $\{(-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{-(\log_2 a)/2}}+\pi n \mid n\in \mathbf{Z},\ 0<a<1\}$.

235. $x\in\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ 0]\cup\{1;\ 2\}$; $x=a+2$ при $a\in\,]0;\ 1[\,\cup\,]1;\ 2\,[\,\cup\{3\}$; $x=a\pm 2$ при $a\in\,]2;\ 3\,[\,\cup\,]3;\ +\infty[$. Решение. Так как $\sqrt{x}$ и a^2 являются основаниями логарифмов, то $x\neq 1$, $a\neq 1$; неизвестное x, входит в выражение $\sqrt{x}$, следовательно, $x>0$; $a>0$, так как логарифмы берутся только от положительных чисел; кроме того, $0<(a^2-4)/(2a-x)<+\infty$ и, следовательно, $a\neq 2$, $x\neq 2a$ и $x>2a$ при $0<a<2$ и $x<2a$ при $a>2$. Заметим, что при этих условиях

$$\log_{\sqrt{x}} a=2/\log_a x$$

и

$$\log_{a^2}((a^2-4)/(2a-x))=0{,}5\log_a((a^2-4)/(2a-x))$$

и заданное уравнение можно записать в виде

$$\log_a\frac{a^2-4}{2a-x}=\log_a x\Rightarrow\frac{a^2-4}{2a-x}=x\Rightarrow x^2-2ax+a^2-4=0\Rightarrow x=a\pm 2.$$

Так как при $a\in\,]0;\ 1\,[\,\cup\,]\,1;\ 2\,[$ мы имеем $x>2a$, то из двух найденных решений этому условию удовлетворяет только $x=a+2$. При $a>2$ величина $x<2a$ и, следовательно, этому условию удовлетворяют оба решения, кроме $a=3$, так как в этом случае $x=a-2=1$, что исключено из значений x, следовательно, при $a=3$ имеем для x лишь одно решение $x=a+2=5$. Объединяя все результаты, мы и получим записанное выше решение.

236. $\{25\}$. **237.** $\{3^{-2};\ 1;\ 3\}$. **238.** $x\in\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ 1]$; $x=a\pm 1$ при $a\in\,]\,1;\ \sqrt{2}\,[\,\cup\,]\,\sqrt{2};\ 2\,[\,\cup\,]\,2;\ +\infty[$; $x=a+1=3$ при $a=2$. Решение. Из рассмотрения уравнения заключаем, что $x>0$, $x\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$, $a^2-1>0$, т. е. $|a|>1$, а так как $a>0$, то отсюда следует, что $a>1$; $a^2-1\neq 1$, т. е. $a^2\neq 2$ или $a\neq\sqrt{2}$; и наконец, $2a-x>0$, т. е. $x<2a$. Следовательно, для неизвестного x получим границы $0<x<2a$, $x\neq 1$. Записывая данное уравнение при основании всех логарифмов, равном 2, получим

$$\log_2(2a-x)+\log_2 x=\log_2(a^2-1)\Rightarrow(2a-x)\,x=a^2-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2-1=0\Rightarrow(x-a)^2=1\Rightarrow x=a\pm 1.$$

Всем перечисленным выше условиям найденные решения удовлетворяют, кроме условия $x\neq 1$; действительно, при $a=2$ получаем два значения для x, одно из которых, $x=a+1=3$, удовлетворяет всем условиям, а второе, $x=1$, решением не является. Объединяя все результаты, мы получим записанное выше решение.

239. $\{a^2\mid a=1/\sqrt{2};\ a\neq 1\}$. **240.** $\{4\}$. **241.** $\{(2+\sqrt{3})^{\log_2(2+\sqrt{3})}\}$.

242. $\{\arcsin(1/14)+2\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$. **243.** $\{1\}$. **244.** $\{1\}$. **245.** $\{-1\}$. **246.** $\{-1;\ 3\}$.

247. $\{16\}$. **248.** $\{9\}$. **249.** $\{2\}$. **250.** $\{1;\ \log_3 2\}$. **251.** $\{2;\ 64\}$. **252.** $\{1/\sqrt[3]{3}\}$. **253.** $\{4;\ 36\}$. **254.** $\{0;\ 3\}$. **255.** $\{9\}$. **256.** $\{1/3;\ 9\}$. **257.** $\{10;\ 10^4\}$. **258.** $\{1\}$. **259.** $\{5^{-4};\ 5\}$. **260.** $\{-1/2;\ 1/2\}$. **261.** $\{-1/2;\ 1/2\}$. **262.** При всех $a\in\,]-\infty;\ 0\,[\,\cup\,]\,0;\ 1/8\,[$. **263.** $]1/5;\ 2/5[$. **264.** $]\,1/3;\ 2\,[$. **265.** $]-1/2;\ 1/2[$. **266.** $]1;\ 2[\,\cup\,]3;\ 4[$. **267.** $[-1;\ 1[\,\cup\,]\,3;\ 5]$. **268.** $]2;\ 3[$. **269.** $]-\infty;\ 1/2[$. **270.** $]4;\ 6[$. **271.** $[1/3;\ 1/2[$. **272.** $[1/3;\ 2/3[$. **273.** $[-7;\ -\sqrt{35}\,[\,\cup\,[5;\ \sqrt{35}[$. **274.** $]-\infty;\ -3/2[\,\cup\,]3;\ +\infty[$. **275.** $[1/2;\ 4]$. **276.** $]1/\sqrt{27};\ +\infty[$.

277. $]0;\ 1/2]\cup]\,2;\ 4]$. **278.** $]0;\ 10[$. **279.** $]0{,}1;\ 1\,[\,\cup\,]\,1;\ 10[$.

280. $]-1;\ 0[\,\cup\,]1;\ 2[$. **281.** $[\log_3 0{,}9;\ 2[$. **282.** $]-1;\ +\infty[$.

283. $]-4/3;\ -17/22[$.

284. $]-2;\ 2-\sqrt{15}[$. Решение. Так как знаменатель дроби всегда >0, то и числитель должен быть $\geqslant 0$, чтобы выполнялось неравенство. Трехчлен $2-5x-x^2>0$ при $x\in]-2;\ 1/3[$, и только при этих значениях знаменатель имеет смысл. Трехчлен $x^2-4x+11=(x-2)^2+7\geqslant 7$ при любых $x\in\boldsymbol{R}$, и при этом $\log_5(x^2-4x+11)^2>0$. Трехчлен $x^2-4x-11$ принимает неотрицательные значения при $x\in]-\infty;\ 2-\sqrt{15}]\cup[2+\sqrt{15};\ +\infty[$ и лишь при этих значениях $\log_{11}(x^2-4x-11)^3$ имеет смысл. Итак, чтобы левая часть неравенства имела смысл, необходимо, чтобы выполнялись оба неравенства, т. е. чтобы $x\in]-2;\ 2-\sqrt{15}[$. На этом интервале $f(x)=\log_{11}(x^2-4x-11)<0$. Действительно, $f(-2)=\log_{11}1^3=0$, $f(2-\sqrt{15})=\log_{11}0=-\infty$. Минимального значения трехчлен $x^2-4x-11$ достигает при $x=2$. При изменении x влево от $x=2$ значения трехчлена постоянно растут, при $x=2-\sqrt{15}$ его значение равно нулю, при $x=+2$ это значение равно 1; таким образом, $f(x)$ при изменении x от $2-\sqrt{15}$ до -2 монотонно возрастает, оставаясь все время отрицательной. Следовательно, числитель дроби в левой части неравенства при $x\in]-2;\ 2-\sqrt{15}[$ положителен и неравенство справедливо при этих значениях.

285. $]-\infty;\ -2[\cup]-1/2;\ +\infty[$. **286.** $]6;\ +\infty[$. **287.** $]2;\ 5/2[$.

288. $]-\infty;\ -1[\cup]4;\ +\infty[$. **289.** $]-\infty;\ -2[\cup]4;\ +\infty[$.

290. $]-4/3;\ (3-\sqrt{17})/2[\cup](3+\sqrt{17})/2;\ +\infty[$. **291.** $]-\sqrt{2};-1[\cup]1;\ \sqrt{2}[$.
292. $]-1;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$. **293.** $]-16/3;\ -3[$. **294.** $]1;2[\cup]3;\ +\infty[$. **295.** $]2;\ +\infty[$.
296. $]1;\ 2]\cup[3;\ 4[$. **297.** $]-\sqrt{5};\ -2[\cup]1;\ \sqrt{5}[$. **298.** $]2;\ 3[$. **299.** $]-\infty;\ 2[$.
300. $]-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1[$. **301.** $]-3;\ -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};\ 3[$.

302. $]-4;-3[\cup]8;+\infty[$. **303.** $]-\infty;\ -1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2};\ 1[\cup]1;+\infty[$.
304. $]\log_3 10;\ +\infty[$. **305.** $]3;\ 4[\cup]6;+\infty[$. **306.** $]-1/2;\ 0]$. **307.** $]-1/2;\ -1/3[$.
308. $]0;\ 1/2[\cup]2;\ 3[$. **309.** $]-\infty;\ -2[\cup]-\sqrt{2};\ -1[\cup]1;\ \sqrt{2}[\cup]2;+\infty[$.
310. $]-\infty;-2/3]\cup[1/2;2]$. **311.** $[\sqrt{6}-1;2[\cup]2;5]$. **312.** $]\log_2(2/3);0[\cup]0;+\infty[$.
313. $]-1;\ (1-\sqrt{5})/2[\cup](1+\sqrt{5})/2;\ 2[$. **314.** $]4;\ +\infty[$. **315.** $]0;\ 1[\cup]\sqrt{3};\ 9[$.
316. $]\log_2(5/4);\ \log_2 3[$. **317.** $[\log_2 14;\ 4]$. **318.** $]3;\ 10[$. **319.** $]5/8;\ +\infty[$.
320. $[0;25/48]$. **321.** $]0;\ 1/5[\cup]1;5\sqrt{5}[$. **322.** $]1;4[$. **323.** $]0;27[$. **324.** $[0;1/3[\cup]3;10/3]$.
325. $]0;\ 1/8]\cup[1/4;\ +\infty[$. **326.** $[2+\sqrt{2};\ 4[$. **327.** $]3/4;\ 4/3[$.

328. $]0;\ 1/2[\cup]1;\ 2[\cup]3;\ 6[$. **329.** $]2;\ +\infty[$.

330. $]-3/2;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 3[$. **331.** $]10-\sqrt{43};\ 4[\cup]10+\sqrt{43};\ +\infty[$.
332. $]2;\ \sqrt{2}+1[\cup[3{,}5;\ +\infty[$. **333.** $]5;\ 5{,}5[\cup[6{,}5;\ +\infty[$.

334. $[-\sqrt{8};-1[\cup]1;\ (\sqrt{41}-1)/5]$. **335.** $]0;\ 1]\cup]2;\ +\infty[$.
336. $]3;\ 5-\sqrt{3}[\cup]7;\ +\infty[$. **337.** $]-6;\ -5[\cup]-3;\ -2[$.

338. $]0;\ (3-\sqrt{5})/2[\cup[5/2;\ (3+\sqrt{5})/2[$.

339. $]-2;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$.

340. $]1-\sqrt{7};-1[\cup]-1/3;\ 0[\cup]0;\ 1/3[\cup]2;\ 1+\sqrt{7}[$.

341. $[1/2;\ 1[\cup[2;\ +\infty[$. **342.** $]3;4{,}5[\cup]8;+\infty[$. **343.** $]-\sqrt{2};-1[\cup]1;\ \sqrt{2}[$.
344. $[-4;\ -1]$. **345.** $]-4-\sqrt{2};-5[\cup]-3;\ -4+\sqrt{2}[\cup]1;\ 2[$. **346.** $]0{,}7;\ 1[$.
347. $]-1;\ 2[$. **348.** $]-1;\ -2/\sqrt{5}[\cup]2/\sqrt{5};\ 1[$.

349. $]4\pi n;\ \pi(12n+1)/3[\cup]\pi(12n+5)/3;\ 2\pi+4\pi n[\ (n\in\boldsymbol{Z})$.

350. $]0;\ 1[\cup[2;\ +\infty[$. **351.** $]0;\ 1/\sqrt{5}[\cup]1;\ 3[$. **352.** $]0;\ 10^{(\lg 0{,}5\cdot\lg 3)/\lg 1{,}5}[$.
353. $]0;\ 1/2[\cup[\sqrt{2};\ +\infty[$. **354.** $]0,\ 1/4]\cup[1;\ 4[$. **355.** $]3;\ 9[$. **356.** $[2;\ +\infty[$.
357. $]0;\ 1/4]\cup[4;+\infty[$. **358.** $]\log_5(1+\sqrt{2});\ \log_5 3[$. **359.** $]\log_2 5;\ 3[\cup]\log_2 14;+\infty[$.
360. $]1;\ 10^3[$. **361.** $]-1;\ 0[$. **362.** $]0;\ 3[\cup]7;\ +\infty[$.

363. $x\in]1;\ (1+\sqrt{1+4a^2})/2$ [при $a\in]0;\ 1[$;
$x\in](1+\sqrt{1+4a^2})/2;\ +\infty[$ при $a\in]1;\ +\infty[$.

364. $x\in]a^4;\ a^{-1}[$ при $a\in]0;\ 1[$; $x\in]a^{-1};\ a^4[$ при $x\in]1;\ +\infty[$.

365. $x\in[(202-53d)/24;\ +\infty[$ при $d\in]-\infty;\ 2[$; $x\in[4;\ +\infty[$ при $d=2$;
$x\in[3d-2;\ +\infty[$ при $d\in]2;\ +\infty[$.

366. $x\in]0;\ a^5[\cup]a^3;\ a^2]\cup]a^{-1};\ +\infty[$ при $a\in]0;\ 1[$;
$x\in]0;\ a^{-1}[\cup]a^2;\ a^3[\cup]a^5;\ +\infty[$ при $a\in]1;\ +\infty[$.

367. $]0;\ 10^{-3}[\cup]10^{-2};\ 10^2[\cup]10^3;\ +\infty[$. **368.** $]-\infty;\ -2[$. **369.** $]1;\ 2[$.
370. $]0;\ 10^{-1}]\cup[10^2;\ +\infty[$.

371. $[3;\ +\infty[$. Решение. Выражения в левой части имеют смысл при $x\in]1;\ +\infty[$. Тогда, учитывая, что $\log_{1/3}y$ — убывающая функция, имеем $\log_{1/3}x+2\log_{1/9}(x-1)\leqslant\log_{1/3}6 \Rightarrow \log_{1/3}(x^2-x)\leqslant\log_{1/3}6 \Rightarrow x^2-x\geqslant 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\leqslant -2$, или $x\geqslant 3$. Так как, кроме того, $x\in]1;\ +\infty[$, то первое полученное неравенство отпадает и заданное неравенство выполняется только при $x\in[3;\ +\infty[$.

372. $]3;\ 4[$.

373. $x\in[\log_a(4+\sqrt{16+a^2});\ 3\log_a 2[$ при $a\in]0;\ 1[$;
$x\in[\log_a(4+\sqrt{16+a^2});+\infty[$ при $a\in]1;\ +\infty[$.

374. $[2;\ +\infty[$. **375.** $]-1+\log_2(5+\sqrt{33});\ +\infty[$.

376. $]-1-\sqrt{5};\ -3[\cup]\sqrt{5}-1;\ 5[$. **377.** $]0;\ 1/6[\cup]3/2;\ +\infty[$.
378. $]-2;\ 2[$. **379.** $]-1;\ +\infty[$. **380.** $[2;\ +\infty[$. **381.** $]-3;\ -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};\ 3[$.
382. $]1;\ 2[$. **383.** $]1/3;\ 1[$. **384.** $]-\infty;\ -5[\cup]-5;\ -1[\cup]3;\ +\infty[$. **385.** $]2;\ 5/2[$.
386. $\{1\}$. **387.** $\{(2;\ 3/2)\}$. **388.** $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$. **389.** $\{(2;\ 2)\}$. **390.** $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$.
391. $\{(4;\ 2),\ (1;\ 1)\}$. **392.** $\{(-2;\ 0)\}$. **393.** $\{(-2;\ 1/784)\}$. **394.** $\{(12;\ 4)\}$.
395. $\{(5;\ 2)\}$. **396.** $\{(8;\ 2)\}$. **397.** $\{(27;\ 4),\ (1/81;\ -3)\}$. **398.** $\{(2;\ 10),\ (10;\ 2)\}$.
399. $\{(2\sqrt{2};\ \sqrt[4]{8})\}$. **400.** $\{(3;\ 5)\}$. **401.** $\{(5;\ 1/2)\}$. **402.** $\{(5;\ 1)\}$. **403.** $\{(4;\ 16)\}$.
404. $\{(9;\ 7)\}$. **405.** $\{(4;\ 2),\ (2;\ 4)\}$. **406.** $\{(10/3;\ 20/3),\ (-10;\ 20)\}$. **407.** $\{(2;\ 1/2)\}$.
408. $\{(2;\ 2)\}$. **409.** $\{(625;\ 3),\ (125;\ 4)\}$.

410. $\left\{\left(2^{\sqrt[3]{\log_2^2 7/\log_3 5}};\ 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 5/\log_2 7}}\right)\right\}$. **411.** $\{(a^3;\ a^{-1});\ (a^{-1};\ a^3)\mid a>0\}$.
412. $\{(2;\ 1/6)\}$. **413.** $\{(20;\ 16)\}$. **414.** $\{(4;\ 2)\}$. **415.** $\{(2;\ 5)\}$. **416.** $\{(6;\ 2)\}$.
417. $\{(4,\ 16)\}$. **418.** $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$. **419.** $\{(512;\ 1)\}$. **420.** $\{(3;\ 9),\ (9;\ 3)\}$.
421. $\{(5;\ 5)\}$. **422.** $\{(64;\ 1/4)\}$. **423.** $\{(2;\ 1/4),\ (2+\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7})\}$.
424. $\{(4;\ 1)\},\ (16;\ 2)\}$.

425. $\{2;\ 1\}$. Решение. Первое уравнение системы можно переписать так ($xy\neq 0$):

$$2^{2(x^2+y^2)/xy}=2^5 \Rightarrow \frac{2(x^2+y^2)}{xy}=5 \Rightarrow 2\frac{x}{y}+\frac{2}{x/y}=5 \Rightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+2=$$
$$=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{2x}{y}-1\right)=0 \Rightarrow x=2y \text{ или } y=2x.$$

Таким образом, исходная система уравнений сводится к двум системам

$$\begin{cases} x=2y, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y), \\ xy\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y), \\ xy\neq 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы замечаем, что $x-y>0$ и $x+y>0$. Системы можно переписать так:

$$\begin{cases} x=2y, \\ x^2-y^2=3, \\ x-y>0, \\ x+y>0, \\ xy\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x, \\ x^2-y^2=3, \\ x-y>0, \\ x+y>0, \\ xy\neq 0. \end{cases}$$

Решая совместно два уравнения из первой системы, получаем два решения: (2; 1) и (—2; —1). Первое из этих решений удовлетворяет всем условиям, а второе не удовлетворяет третьему и четвертому условиям. Подставляя $y=2x$ из первого уравнения второй системы во второе уравнение, получаем противоречивое равенство $-3y^2=3$; следовательно, вторая система решений не имеет. Итак, данная система имеет единственное решение (2; 1).

426. $\{(1;\ 1)\}$. **427.** $\{(2;\ 6)\}$.

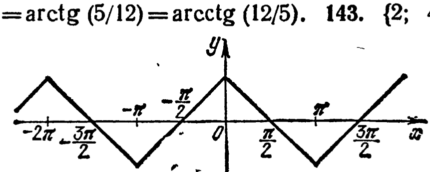
§ 10

61. -1. **62.** $1/\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha$. **63.** $2\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **64.** $32\sin^2\alpha\cos^4\alpha$. **65.** 1. **66.** $\operatorname{tg}\alpha$. **67.** 2. **68.** $\operatorname{tg}5\alpha$. **69.** 3/2. **70.** 1. **71.** $\cos 2\alpha$. **72.** 0. **73.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **74.** 1/2. **75.** $(\sin 4\alpha)/2$. **76.** $\sin^2\alpha$. **77.** 1. **78.** $\sin 2\alpha$. **79.** 1/4. **80.** $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **81.** 2. **82.** 42. **83.** 4,5. **84.** $\sqrt{3}$. **85.** $(3-\sqrt{3})/2$. **86.** $\sqrt{3}/8$. **87.** 0. **88.** 4. **89.** 9. **90.** $\sqrt{2}/8$. **91.** -1. **95.** 225/128. **96.** $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=-3$ или $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=-\sqrt{15}/3$. **97.** 65/113. **98.** $-3\sqrt{7}/8$. **99.** $(1-a^2-2a)/(1-a^2+2a)$. **100.** 31/49. **101.** $-2/\sqrt{13}$. **102.** $5/\sqrt{26}$. **103.** $1/\sqrt{5}$. **104.** 10/11. **105.** $(4-3(m^2-1)^2)/4$, $|m|\leqslant\sqrt{2}$. **106.** $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **107.** $2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **108.** $4\cos\alpha\sin\frac{5\alpha+\beta}{2}\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}$. **109.** $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. **110.** $4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-11\alpha\right)$.

111. $2\sin(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha+\beta-60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+60^\circ}{2}\sec^2\alpha\sec^2\beta$.

112. $0{,}5\cos(\alpha-\beta)\sec\alpha\sec\beta$. **113.** $3\pi/4$. **114.** $17\pi/12$. **115.** 127°. **116.** $\sqrt{3}/2$. **117.** $\pi/2$. **118.** 24/25. **119.** 17/25. **120.** 3/5. **121.** $-3/5$. **122.** 2/3. **123.** 3/4. **124.** 14/15. **125.** $-7/25$. **126.** $-3/4$. **133.** 4/5. **134.** 3/5. **135.** $2/\sqrt{5}$. **136.** $1/\sqrt{5}$. **137.** $-\pi/7$. **138.** $3\pi/7$. **139.** $\pi/7$. **140.** $-\pi/7$. **141.** $6\pi/7$. **142.** $\arccos(12/13)=\operatorname{arctg}(5/12)=\operatorname{arcctg}(12/5)$. **143.** $\{2;\ 4\}$. **144.** 1/2. **145.** 1.

146.



147. $x\in\,]2-\sqrt{9-2\pi};\ 2+\sqrt{9-2\pi}[$.

1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

2. $x=(-1)^n\arcsin(-1/3)+\pi n=(-1)^{n+1}\arcsin(1/3)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $x=(-1)^n\arcsin 0+\pi n=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4. $x=(-1)^n\arcsin 1+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$. Полагая $n=2k$ и $n=2k+1$, получаем в обоих случаях $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

5. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$. 6. $x=\pi+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$. 7. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$.

8. $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$. 9. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$. 10. $\pi(4n+(-1)^n)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 11. $\pi(3n-(-1)^n)/3\quad(n\in\boldsymbol{Z})$. 12. $\pi(4n-1)/2\quad(n\in\boldsymbol{Z})$. 13. $2\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 14. $\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 15. $\varnothing$. 16. $\pi(4n-1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 17. $\operatorname{arctg}7+1+\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 18. $(\pi(3n+1)-9)/6\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 19. $\pi(12n-1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 20. $(\pi(4n-1)+4)/3\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 21. $\pi(8n\pm 1)/28,\ \pi(2k+1)/14\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 22. $\pi n,\ 2\pi(3k\pm 1)/3\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 23. $\pi+2\pi n,\ \pi(6k+(-1)^k)/6\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 24. $2\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 25. $\pi(4n+1)/2,\ \pi k\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 26. $\pi(4n-1)/4,\ \pi(3k\pm 1)/3\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 27. $\pi(3n-1)/6\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 28. $\pi n/2\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 29. $\pi(4n+1)/2,\ \pi(3k-1)/3\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 30. $\pi(4n+1)/2,\ \pi(6k+(-1)^k)/6\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 31. $2\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 32. $\pi(2n+1)/2,\ 2\pi(3m\pm 1)/3\ (n,m\in\boldsymbol{Z})$. 33. $(-1)^n\arcsin(1/3)+\pi n,\ \pi(6k+(-1)^k)/6\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 34. $\pi+2\pi n,\ \pm\arccos(3/4)+2\pi k\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 35. $\pm\arccos((\sqrt{19}-2)/5)+2\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 36. $\pi(2n+1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 37. $\pi(3n\pm 1)/3\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 38. $\pi(2n+1)/4,\ \pi(3m\pm 1)/3\ (n,\ m\in\boldsymbol{Z})$. 39. $\pi n/2\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 40. $\pi(4n-1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 41. $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \pi(4k+1)/4\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 42. $\pi(4n+1)/4,\ \operatorname{arctg}(-1/3)+\pi k\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 43. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})+\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 44. $\pi(4k-1)/4,\ \pi(3n\pm 1)/3\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 45. $\pi n/2,\ \pi(6k\pm 1)/3\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 46. $2\pi n,\ \pi(4m-1)/2,\ \pi(4k+1)/4\ (n,\ m,\ k\in\boldsymbol{Z})$.

47. $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})\equiv\pi(12n-3+5(-1)^n)/12\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 48. $(\pi(4n+1)-2\arccos(4/5))/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 49. $\pi(12n-5)/12\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 50. $\pi n/3,\ \pi(6k+1)/18\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 51. $\pi(2n+1)/5,\ 2\pi k\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 52. $\pi n/3,\ \pi(2k+1)/8\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 53. $\pi k/2,\ 2\pi(3n\pm 1)/3\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 54. $2\pi n/5,\ \pi(2k+1)/2,\ \pi(2m+1)\ (n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z})$. 55. $\pi n\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 56. $\pi n/2,\ \pi(3k-(-1)^k)/21\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 57. $\pi(2n+1)/6,\ \pi(4k-1)/4\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 58. $2\pi(3n\pm 1)/3,\ \pi(4k+1)/8\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 59. $\pi(4n-1)/4,\ \pi(4k+3)/16\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. Указание. $\sin 5x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$. 60. $((4n-1)\pi-4)/12,\ ((2k-1)\pi-4)/24\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 61. $\pi(12n-1)/24,\ \pi(12k+1)/12\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 62. $\pi(8n+3)/24,\ \pi(8k+2)/16\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 63. $\operatorname{arctg}(2\pm\sqrt{3})+\pi n\equiv\pi(6n+(-1)^n)/12\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 64. $\pi(2n+1)/16,\ \pi(2k+1)/10\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 65. $\pi(2n+1)/4,\ \pi(2k+1)/2\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 66. $\pi(2n+1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 67. $\pi(4n+1)/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 68. $\pi n/4\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 69. $\pi n/8\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 70. $\pi(2n+1)/4,\ \pi(6k\pm 1)/6\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 71. $\pi(2n+1)/10;\ \pi(2k+1)/4\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 72. $\pi n;\ \pi(2k+1)/20\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 73. $\pi(4n+1)/6,\ 2\pi k/3\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 74. $\pi(2n+1)/10,\ \pi(2m+1)/6\ (n,m\in\boldsymbol{Z})$. 75. $\pi(6n+(-1)^n)/18,\ \pi(2k+1)/4\ (n,k\in\boldsymbol{Z})$. 76. $\pi(2k+1)/10\ (n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. 77. $\pi(3n\pm 1)/2\ (n\in\boldsymbol{Z})$. 78. $2\pi n\pm\arccos(-1/4)\ (n\in\boldsymbol{Z})$.

79. $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. Решение. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow 1+\cos^2 2x=\sin 2x\Rightarrow 1+1-$ $-\sin^2 2x=\sin 2x\Rightarrow\sin^2 2x+\sin 2x=2$. Это соотношение возможно лишь при $\sin 2x=1$, откуда $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Итак, $x=\pi(4n+1)/4$.

80. $\pi(4n+1)/4$, $2\pi k$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **81.** $\pi n/5$; $\pi(2k+1)/2$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **82.** $\pi(2n+1)/8$, $\pi(3k\pm 1)/3$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **83.** $\pi n/3$, $2\pi k$, $\pi(2m+1)/11$ $(n, k, m\in\boldsymbol{Z})$. **84.** $\pi(2k+1)/4$, $\pi(2m+1)/10$ $(m, k\in\boldsymbol{Z})$. **85.** $\pi(2n+1)/16$, $(\pi(4k+1)-8)/4$, $(\pi(4m+1)+8)/12$ $(n, k, m\in\boldsymbol{Z})$. **86.** $\pi(2n+1)/10$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **87.** $\pi(3n\pm 1)/3$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **88.** $\pi(4k+1)/10$ $(k\in\boldsymbol{Z})$. **89.** $\pi(4n+1)/2$, $2\pi k$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **90.** $\pi(2n+1)/2$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **91.** $\pi(6n-(-1)^n)/12$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **92.** $\pi(2n+1)/4$, $\pi(6k+(-1)^k)/12$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **93.** $\pi(4n-1)/2$, $(-1)^k\arcsin(3/4)+\pi k$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **94.** $\pi(4n+1)/4$, $\pi(6k+(-1)^k)/24$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **95.** $2\pi(3n\pm 1)/3$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **96.** $2\pi n$, $\pi(2k+1)/2$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **97.** $\pi n/2$, $\pi(12k\pm 1)/6$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$. **98.** $\pi(4n+1+(-1)^n)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **99.** $\pi(4n+1)/2$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **100.** $\pi(4n+(-1)^n/16$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **101.** $\pi n+\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **102.** $\pi(6n+(-1)^n)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **103.** $\pi(2n+1)/14$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **104.** $\pi(2n+1)/4$, $\pi(4k+1)/2$ $(n, k\in\boldsymbol{Z})$.

105. $\pi(4n-1)/4, 2\pi m, \pi(4k-1)/2, \pi\left(4l+1+(-1)^l\sqrt{2}\arcsin\left(\sqrt{2}/4\right)\right)/4$ $(n, m, k, l\in\boldsymbol{Z})$. Решение. Так как $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$, $\sin 3x=$ $=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, то данное уравнение переписывается так:

$$\cos^3 x+\sin^3 x-3\cos x\sin x(\cos x+\sin x)-(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$$

или

$$(\cos x+\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-4\sin x\cos x+\sin x-\cos x)=0.$$

Тогда или

$$1)\ \cos x+\sin x=0,\ \text{или}\ 2)\ 1-2\sin 2x+\sin x-\cos x=0.$$

В случае 1) $\operatorname{tg} x=-1$ и $x=\pi(4n-1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. В случае 2) положим

$$\sin x-\cos x=y; \tag{1}$$

тогда $y^2=(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$ и, следовательно,

$$\sin 2x=1-y^2. \tag{2}$$

Подставляя эти значения в уравнение, получим $1-2(1-y^2)+y=0$ или $2y^2+y-1=0$. Корни этого уравнения -1 и $1/2$. Тогда для нахождения x получим уравнения

$$\text{а)}\ \sin x-\cos x=-1\ \text{и б)}\ \sin x-\cos x=1/2.$$

(Заметим, что если воспользоваться соотношением (2), найти значение x проще, но при этом могут появиться посторонние корни, так как уравнения (1) и (2) не эквивалентны. Из (1) следует (2), но не наоборот.) В случае а) уравнение перепишем так:

$$\sin x+1-\cos x=0\Rightarrow 2\sin(x/2)\cos(x/2)+2\sin^2(x/2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sin^2(x/2)(\operatorname{ctg}(x/2)+1)=0\Rightarrow\sin(x/2)=0\ \text{или}\ \operatorname{ctg} x=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=2\pi m,\ x=\pi(4k-1)/2\ (m, k\in\boldsymbol{Z}).$$

В случае б) правую и левую части уравнения умножим на $\sqrt{2}/2$ и перепишем его в виде

$$\sin x\cos(\pi/4)-\cos x\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/4,$$

или

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^l\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi l \qquad (l\in \boldsymbol{Z}).$$

106. $\pi(2n+1)/22$, $\pi(6k+(-1)^k)/48$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$.

107. πn, $\pi(6k\pm 1)/6$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. Решение. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x-4\sin x\cos 2x=0 \Rightarrow \sin x\left(3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}-\right.$ $\left.-4\cos 2x\right)=0 \Rightarrow \sin x(1-2\cos 2x)=0 \Rightarrow \sin x=0$ или $1-2\cos 2x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\pi n,\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(n, k\in \boldsymbol{Z})$. Таким образом, корнями данного уравнения будут πn, $\pi(6k\pm 1)/6$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$.

108. $\pi(6n+(-1)^n)/12$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Решение. $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x-$ $-\sin 2x=1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cos x}-\sin 2x=1+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}-\sin 2x-\sin 2x=1+\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow -2\sin 2x=1 \Rightarrow \sin 2x=-1/2$. Откуда $x=\pi(6n+(-1)^n)/12$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

109. πn, $\pi(4k+1)/4$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **110.** $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

111. $2\pi(3n\pm 1)/9$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. **112.** $\pi(4n+1)/2$, $\pi+2\pi k$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **113.** $\pi(4n+1)/2$, $2\pi k$, $\pi(4m+1)/4$ $(n,\ k,\ m\in \boldsymbol{Z})$. **114.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. **115.** $\pi(8k+1)/4$, $\pi(8n+3)/12$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **116.** $2\pi n$, $\pi(4k-1)/4$, $\pi(4m-1)/2$ $(n,\ k,\ m\in \boldsymbol{Z})$.
117. $\pi(12n-3+2(-1)^n)/60$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. **118.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. **119.** $\pi(4n+1)/2$, $\pi(2k+1)$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **120.** $2\pi n$, $2\operatorname{arctg}(3/2)+2\pi k$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$.

121. $\pi n-\operatorname{arctg}(-1/2)$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Решение. Переписываем данное уравнение в виде

$$\cos^2 x-2(1-\sin x)\cos x-4\sin x=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\cos x$. Решаем его:

$$\cos x=1-\sin x\pm\sqrt{1-2\sin x+\sin^2 x+4\sin x}=$$
$$=1-\sin x\pm\sqrt{1+2\sin x+\sin^2 x}=1-\sin x\pm(1+\sin x).$$

В случае верхнего знака получаем $\cos x=2$, этот случай надо отбросить. В случае нижнего знака получаем $\cos x=-2\sin x$ или $\operatorname{tg} x=-1/2$, откуда $x=-\operatorname{arctg}(1/2)+\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Если решать данное уравнение, выразив все функции через $\operatorname{tg}(x/2)$, то придем к уравнению

$$3\operatorname{tg}^4(x/2)-12\operatorname{tg}^3(x/2)-2\operatorname{tg}^2(x/2)-4\operatorname{tg}(x/2)-1=0,$$

которое можно разложить на два сомножителя

$$(\operatorname{tg}^2(x/2)-4\operatorname{tg}(x/2)-1)(3\operatorname{tg}^2(x/2)+1)=0.$$

Второй сомножитель нулю не равен ни при каком значении $x\in \boldsymbol{R}$, а первый обращается в нуль при $\operatorname{tg}(x/2)=2\pm\sqrt{5}$, т. е. при $x=2\operatorname{arctg}\left(2\pm\sqrt{5}\right)+$ $+2\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Это другая форма записи решения. Легко показать, что если $\operatorname{tg}(x/2)=2\pm\sqrt{5}$, то отсюда следует, что $\operatorname{tg} x=-1/2$. Верно и обратное. Таким образом, обе записи решения эквивалентны.

122. $\pi n+\operatorname{arctg}(3-2\sqrt{2})$ $(n\in\mathbf{Z})$.

123. $\pi n/3$, $\pi k\pm\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})\equiv\pi k\pm0{,}5\arccos(1/3)$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. Решение. Заметим, что $\operatorname{tg}2x=2\operatorname{tg}x/(1-\operatorname{tg}^2x)$, а $\operatorname{tg}3x=(3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x)/(1-3\operatorname{tg}^2x)$, причем $x\neq\pi(2l+1)/4$, $x\neq\pi(2m+1)/6$ $(l,m\in\mathbf{Z})$. При подстановке этих значений и преобразований заданное уравнение примет вид

$$\operatorname{tg}x(2\operatorname{tg}^4x-7\operatorname{tg}^2x+3)=0,$$

откуда следует две возможности:

$$\operatorname{tg}x=0,\quad 2\operatorname{tg}^4x-7\operatorname{tg}^2x+3=0.$$

Первая возможность дает $x=\pi p$ $(p\in\mathbf{Z})$. Вторая возможность дает $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}x=\pm1/\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi m\quad(m\in\mathbf{Z}),\qquad x=\pm\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})+\pi k\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

Ранее полученное решение $x=\pi p$ и решение $x=\pi(3m\pm1)/3$ можно объединить и записать $x=\pi n/3$ $(n\in\mathbf{Z})$. (При $n=3p$ мы получим πp, а при $n=3m\pm1$ получим $\pi(3m\pm1)/3$.) Итак, все решения можно записать так: $\pi n/3$, $\pi k\pm\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. Легко доказать эквивалентность этой формы записи решения другой, приведенной выше.

124. $\pi(2n+1)/6$, $2\pi(3k\pm1)/9$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. Указание. Введите новую переменную $3x=y$. **125.** $4\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$.

126. $\pi(24n+1)/12$, $\pi(24k-7)/12$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. Решение. Для того чтобы данное уравнение имело решение, должны выполняться условия 1) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$ и 2) $1+8\sin2x\cos^22x\geqslant0$. При этих условиях возводим в квадрат правую и левую части

$$4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin2x(1-\sin^22x)\Rightarrow2\left(1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$
$$=1+8\sin2x-8\sin^32x\Rightarrow2+2\sin6x=1+8\sin2x-8\sin^32x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow2+2(3\sin2x-4\sin^32x)=1+8\sin2x-8\sin^32x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow1=2\sin2x\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\pi l\text{ и }x=\frac{5\pi}{12}+\pi m\quad(l,m\in\mathbf{Z}).$$

Проверим, будут ли все найденные значения x удовлетворять условиям 1) и 2). Подставим $x=\frac{\pi}{12}+\pi l$ в первое условие

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\pi l+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3\pi l+\frac{\pi}{2}\right)=\cos3\pi l,$$

$\cos3\pi l=1>0$ при l четном и $\cos3\pi l=-1<0$ при l нечетном. Для выполнения первого условия полагаем $l=2n$, тогда $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n$ или $\sin x=1/2$. Это значение x подставляем во второе условие. Тогда имеем

$$1+8\sin2x\cos^22x=1+8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=4>0,$$

т. е. второе условие также выполнено, т. е. $x=\pi(24n+1)/12$ является решением данного уравнения. Подставим теперь $x=\frac{5\pi}{12}+\pi m$ в первое условие;

получим

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}+3\pi m+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi m\right)=-\cos 3\pi m,$$

$-\cos 3\pi m=-1<0$ при четном m и $-\cos 3\pi m=1>0$ при m нечетном. Для выполнения первого условия полагаем в этом случае $m=2k-1$; тогда $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi k$. Так как и в этом случае $\sin 2x=1/2$, то второе условие также выполнено, следовательно, $x=\pi(24k-7)/12$ является решением данного уравнения.

127. $\pi(2n+1)/2$, $\pi(6k+(-1)^k)/24$ $(n,\ k\in \mathbf{Z})$. **128.** $\pi(6n-(-1)^n)/12$ $(n\in\mathbf{Z})$. **129.** $\operatorname{arctg}(2/3)+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **130.** $\pi(6n-(-1)^n)/18$ $(n\in\mathbf{Z})$. **131.** $\pi n-(-1)^n\arcsin(1/3)$ $(n\in\mathbf{Z})$. **132.** $\pi n+\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\pi k+$ $+\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ $(n, k\in\mathbf{Z})$. **133.** $\pi(8n-1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **134.** 4. **135.** $\varnothing$. **136.** $\pi n\pm\arccos(1/3)$ $(n\in\mathbf{Z})$. **137.** $\pi(2n+1)/6$, $\pi(4k+(-1)^k)/20$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **138.** $2\pi(3n\pm1)/3$ $(n\in\mathbf{Z})$. **139.** $\pi(6n\pm1)/18$ $(n\in\mathbf{Z})$. **140.** $\pi n/5$, $(2\pi k\pm\arccos(1/4))/5$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **141.** πn, $\pi(6k\pm1)/3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **142.** $\pi(2n+1)/2$, $\pi(4k+1)/4$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **143.** $\pi(2n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **144.** $\pi(2k+1)/4$, $\pi(6n\pm1)/6$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **145.** $\pi(6n\pm1)/6$, $(n\in\mathbf{Z})$. **146.** $\pi n/2$, $\pi(2k+1)/8$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **147.** πn, $\pi(3k+1)/3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **148.** $\pi(2n+1)/4$, $\pi(6k\pm1)/6$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **149.** $\pi(2n+1)/8$, $\pi(3k\pm2)/9$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **150.** $\pi(2n+1)/6$, $\pi(6k-(-1)^k)/12$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **151.** $5\pi n$, $5\pi(2k+1)/2$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **152.** $2\pi n/3$, $\pi(4k+1)/4$, $\pi(4m-1)/4$ $(n,\ k,\ m\in\mathbf{Z})$. **153.** $\operatorname{arctg}(-1/3)+\pi n$, $\pi(4k+1)/4$, $\pi(2m+1)/2$ $(n,\ k,\ m\in\mathbf{Z})$. **154.** πn, $\pi(4k-1)/4$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **155.** πn, $\pi(6k\pm1)/3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **156.** $\pi n/3$, $\pi(2k+1)/7$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **157.** $2\pi n$, $2\pi(3k\pm1)/3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **158.** $\pi n/3$, $\pi(4k+1)/12$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **159.** $\pi(2n+1)/8$ $(n\in\mathbf{Z})$. **160.** $\pi(2n+1)/2$, $\pi(6k\pm1)/15$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **161.** $\pi(2n+1)/11$, $2\pi k/5$, $\pi(2m+1)/2$ $(n,\ k,\ m\in\mathbf{Z})$. **162.** πn, $\pi(6k+1)/48$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **163.** $\pi(4n+1)/4$, $2\pi(3k\pm1)/3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **164.** πn, $\pi(6k+(-1)^k)/6$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **165.** $\pi(4n+(-1)^n)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **166.** $\pi(3n\pm1)/6$ $(n\in\mathbf{Z})$. **167.** $\pi(2n+1)/4$, $\pi(3k-1)/6$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **168.** $\pi(2n+1)/6$ $(n\in\mathbf{Z})$. **169.** $\pi(12k+3+4(-1)^k)/36$ $(k\in\mathbf{Z})$. **170.** $\pi(6n+(-1)^n)/6$ $(n\in\mathbf{Z})$. **171.** $\pi(4n-1)/4$, $\pi(4m+1)/8$ $(n,\ m\in\mathbf{Z})$. **172.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **173.** $(\pi n+3)/2$ $(n\in\mathbf{Z})$. **174.** $2\pi(3n+1)/3$ $(n\in\mathbf{Z})$. **175.** πn, $\pi(3k+(-1)^k)/6$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **176.** $\pi(4n-1)/4$, $\pi k+\operatorname{arctg}3$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **177.** $\pi(2n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **178.** $\pi(2n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **179.** $2\pi n/3$, $\pi(4k+1)/6$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **180.** $\pi(3n+1)/3$, $\pi+2\pi k$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **181.** $\pm\arccos(1/4)+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **182.** $\pi(6n+1)/6$, $\pi(6k\pm1)/12$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **183.** $\pi+2\pi n$, $\pi(4k+1)/2$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **184.** $\pi n/12$ $(n\in\mathbf{Z})$. **185.** $\pi n/4$, $\pi(4k+1)/32$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **186.** $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+$ $+\frac{\pi}{2}n$, $\pi(4k+1)/4$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **187.** πn, $\pi(3k+(-1)^k)/6$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. **188.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **189.** $\pi(4n+1)/2$, $2\operatorname{arctg}(3/5)+2\pi k$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **190.** $\pi n/11$, πm $(n\in\mathbf{N}_0,\ m\in\mathbf{N})$. **191.** $\pi n/3$, $\pi k/11$ $(n=0, 1, 2, \ldots;\ -k\in\mathbf{N})$. **192.** $\pi(2n+1)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$. **193.** $\pi(4n+1)/4$, $\pi(4k-(-1)^k)/8$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$. **194.** $\pm\arccos(-1/4)+$ $+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **195.** $\pi(2n+1)/20$, $\pi(2k+1)/8$ $(n,\ k\in\mathbf{Z})$.

196. $\pi(4n-1)/4$, $\left(\pi(4k-1)-4(-1)^k\arcsin\left((\sqrt{2}-2)/2\right)\right)/4$ $(n,k\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x\,(1+\sin x)+\cos x\,(1-\sin^2 x)=0.$$

Уравнение $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=0$ равносильно уравнению $(\sin x+\cos x)^2 - 2(\sin x+\cos x)-1=0$.

197. $\pi(6n+(-1)^n)/12$, $\pi(4k+1)/14$, $\pi(4m+1)/6$ $(n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z})$.

198. $\pi(6n-(-1)^n)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **199.** $\pi(6k+(-1)^k)/6$ $(k\in\boldsymbol{Z})$. **200.** $2\pi n/5$, $2\pi k/3$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **201.** $\pi(4n+1)/6$, $\pi(6k-(-1)^k)/18$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **202.** $\pi(3n\pm1)/3$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **203.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **204.** $\pi(4n+1)/2$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **205.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **206.** $\pi(6n\pm1)/12$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **207.** $\pi n/2$, $\pi(6k-(-1)^k)/12$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **208.** $\pi n/4$, $(n\in\boldsymbol{Z})$. **209.** $\pi n/4$, $\pi(3k\pm1)/12$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **210.** $\pi n/2$, $\pi(2k+1)/12$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **211.** $\pi n/4$ $(n\neq 4m,\ m\in\boldsymbol{Z})$. **212.** $\pi(8n\pm1)/8$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **213.** $\pi(4n+1)/8$, $\pi(4k+3)/4$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$.

214. $\pi(3n\pm1)/3$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. Указание. Так как $\cos x\neq 0$, то уравнение разделите на $\cos x$ и примените формулу (2) § 10.

215. $\pi(3n+(-1)^n)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **216.** $\pi(3n+1)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **217.** πn $(n\in\boldsymbol{Z})$. **218.** $\pi(3n\pm1)/12$ $(n\in\boldsymbol{Z})$.

219. $\pi(6n-1)/3$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **220.** $2\pi n$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **221.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $2\pi k\pm\arccos\sqrt[4]{2/3}$, $2\pi m+\pi\pm\arccos\sqrt[4]{2/3}$ $(n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z})$. **222.** πn, $2\pi k\pm\arccos((-3+\sqrt{5})/6)$, $2\pi m\pm\arccos((-3-\sqrt{5})/6)$ $(m,\ k,\ n\in\boldsymbol{Z})$.

223. Если $a=2\pi n$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{[\pi(4k-1)/2;\ \pi(4k+1)/2]\mid k\in\boldsymbol{Z}\};$$

если $a=(2n+1)\pi$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{[\pi(4k+1)/2;\ \pi(4k+3)/2]\mid k\in\boldsymbol{Z}\};$$

если $a\in]4\pi n,\ (4n+1)\pi[$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{(\pi(8k+7\pm1)-2a)/4\mid k\in\boldsymbol{Z}\};$$

если $a\in](4n+1)\pi,\ (4n+2)\pi[$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{(\pi(8k+5\pm1)-2a)/4\mid k\in\boldsymbol{Z}\};$$

если $a\in](4n+2)\pi,\ (4n+3)\pi[$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{(\pi(8k+3\pm1)-2a)/4\mid k\in\boldsymbol{Z}\};$$

если $a\in](4n+3)\pi,\ (4n+4)\pi[$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, то

$$\{(\pi(8k+1\pm1)-2a)/4\mid k\in\boldsymbol{Z}\}.$$

224. $2/(3\pi(2n+1)-4)$, $1/(3(\pi k+(-1)^k\arcsin(3/4))-2)$ $(k,\ n\in\boldsymbol{Z})$.

225. $2\pi n$; $\pm2\arccos((-1+\sqrt{4a+5})/4)+4\pi k$ при $a\in[-5/4;\ 5]$; $\pm2\arccos((-1-\sqrt{4a+5})/4)+4\pi m$ при $a\in[-5/4;\ 1]$ $(n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z})$.

226. $(-1)^{n+1}\arcsin(\pi/8)+\pi(3n-1)/3$, $(-1)^k\arcsin(\pi/4\sqrt{2})+\pi(4k-1)/4$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$.

227. $\pi(24n+13)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. Указание. $\sqrt{3}\cos x+\sin x-2 = 2\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right)$.

228. $x=[(-1)^k\arcsin(1-\sqrt{2a+3})+\pi k]/2$ $(k\in\boldsymbol{Z})$ при $a\in[-3/2;\ 1/2]$.

229. $\pi(2n+1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **230.** $\pi n/2$, $\pi(4k\pm1)/8$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **231.** $\pi(2n+1)$, $\pi(4k+1)/4$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$. **232.** $\pi(4n+1)/4$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **233.** $\pi(12n\pm5)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$.

234. $\pi(6n\pm1)/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. Решение. Для решения данного уравнения требуется, чтобы $4\cos 2x>-1$, т. е. $\cos 2x>-1/4$ $(2\cos 2x+2\geqslant 0$ при любых $x\in\boldsymbol{R})$. Тогда, умножая на $\sqrt{4\cos 2x+1}$, возводя в квадрат и преобразуя, получим уравнение

$$8\cos^2 2x+10\cos 2x-7=0$$

или

$$(4\cos 2x+7)(2\cos 2x-1)=0.$$

В этом выражении $4\cos 2x+7>0$ при любых $x\in \boldsymbol{R}$, поэтому $2\cos 2x=1$ и $x=\pi(6n\pm 1)/6$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

235. $\sqrt{3}$.

236. $\pi(4n+1)/4$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Решение. $\sin 2x+\operatorname{tg} x=2 \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg} x=$ $=2\Rightarrow \operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-2=0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+2)=0$. Второй множитель ни при каком $x\in \boldsymbol{R}$ не может обращаться в нуль. Поэтому данное уравнение при условии, что $x\neq \pi(2l+1)/2$ $(l\in \boldsymbol{Z})$, эквивалентно уравнению $\operatorname{tg} x-1=0$, откуда $x=\pi(4n+1)/4$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

237. πn, $\pi(8k\pm 1)/4$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **238.** $\pi n+\operatorname{arctg}(3/4)$, $\pi(4k-1)/4$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. **239.** $\pi(3n\pm 1)/3$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. **240.** $\pi(2n+1)$, $\pi m+\operatorname{arctg} 4$ $(n, m\in \boldsymbol{Z})$. **241.** $\pi(4n+1)/4$, $\pi(2k+1)/2$ $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$.

242. $\pi(4n-1)/4$, πk $(n,\ k\in \boldsymbol{Z})$. Решение. Выражения, стоящие в левой и правой части данного уравнения, имеют смысл при условии, что $x\neq \pi(2l+1)/2$ $(l\in \boldsymbol{Z})$. Так как $1-\operatorname{tg} x=(\cos x-\sin x)/\cos x$, $1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$, $1+\operatorname{tg} x=(\cos x+\sin x)/\cos x$, причем $\cos x\neq 0$, то уравнение принимает вид $\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2}{\cos x}=1+\operatorname{tg} x\Rightarrow$

$$\Rightarrow(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos x+\sin x)/\cos x=1+\operatorname{tg} x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos 2x\cdot(1+\operatorname{tg} x)=(1+\operatorname{tg} x)\Rightarrow(1+\operatorname{tg} x)(\cos 2x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\operatorname{tg} x=-1 \text{ или } \cos 2x=1\Rightarrow x=\pi(4n-1)/4, \text{ или } x=\pi k, \text{ где } n,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

243. $\pi n/4$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

244. $2\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Решение.

$$2\operatorname{tg}^2 x+3=\frac{3}{\cos x}\Rightarrow 2\sec^2 x+1-\frac{3}{\cos x}=0\Rightarrow 2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2-3\left(\frac{1}{\cos x}\right)+1=$$
$$=0\Rightarrow\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\left(\frac{2}{\cos x}-1\right)=0.$$

Заметим, что уравнение имеет смысл лишь при условии $\cos x\neq 0$. Второй множитель полученного произведения ни при каких $x\in \boldsymbol{R}$ нулю не равен. Первый множитель равен нулю, если $\cos x=1$, т. е. $x=2\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

245. $\pi(6n\pm 1)/6$, $\pi(3m\pm 1)/3$ $(m,\ n\in \boldsymbol{Z})$. Решение. Обозначим $81^{\sin^2 x}=y$; тогда $81^{\cos^2 x}=81^{1-\sin^2 x}=81\cdot y^{-1}$ и уравнение после преобразований принимает вид $y^2-30y+81=0$, корнями этого уравнения будут $y=3$ и $y=27$. Тогда $81^{\sin^2 x}=3$ или $81^{\sin^2 x}=27$. Первое из них можно переписать $3^{4\sin^2 x}=$ $=3\Rightarrow 4\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=\pm 1/2\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in \boldsymbol{Z})$. Второе уравнение дает $81^{\sin^2 x}=27\Rightarrow 3^{4\sin^2 x}=3^3\Rightarrow 4\sin^2 x=3\Rightarrow \sin x=\pm\sqrt{3}/2\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi m$ $(m\in \boldsymbol{Z})$. Следовательно, решениями данного уравнения будут множества $\pi(6n\pm 1)/6$, $\pi(3m\pm 1)/3$ $(n,\ m\in \boldsymbol{Z})$. Это множество решений можно записать и в другой форме: $\pi(30n+15\pm 4)/60$ $(n\in \boldsymbol{Z})$.

246. $p\in[\sqrt{5}-1;\ 2]$. **247.** $a\in[2;\ 6]$. **248.** $7\pi/18$. **249.** $0°$. **250.** $-31\pi/24$;

$\pi/24$; $17\pi/24$. **251.** $\pi(2m+1)/2$, $\pi(6n\pm 1)/3$, $2\pi k\pm\arccos(-2/3)$ $(m, n, k\in \mathbf{Z})$. Наименьшее расстояние между положительными корнями равно $\pi/6$.

252. $-5\pi/6$; $-2\pi/3$; 0; $\pi/6$; $\pi/3$. **253.** 0; $\pi/8$; $\pi/4$; $\pi/2$, $5\pi/8$; $3\pi/4$; π. **254.** $\pi(2k+1)-\operatorname{arctg}3$ $(k\in\mathbf{Z})$, т. е. все числа, для которых n — число нечетное. **255.** $-7\pi/12$; $\pi/12$; $5\pi/12$. **256.** $-\pi$; $-5\pi/6$; $-2\pi/3$; $-\pi/3$; 0; $\pi/6$. **257.** $\pi(3n-1)/6$ $(n=3, 4, \ldots)$. **258.** n, $(-1\pm\sqrt{3+4k})/2$ $(n\in\mathbf{Z};\ k=0, 1, 2, \ldots)$, $x_7=(-1+\sqrt{23})/2$. **259.** πn $(n\in\mathbf{Z})$, 4950π. **260.** $\pi n+(-1)^n\arcsin(1/3)$ $(n\in\mathbf{Z})$. **261.** πn $(n=-1, 0, 1)$; $\pi(6k+1)/6$ $(k=-2, -1, 0, 1)$; $\pi(6m-1)/6$ $(m=-1, 0, 1, 2)$. **262.** $\pi(8n+5)/8$ $(n\in\mathbf{Z})$. **263.** $]2\pi n;\ \pi+2\pi n[$, $n\in\mathbf{Z}$.

264. $]\pi(12n+1)/6;\ \pi(12n+5)/6[$, $n\in\mathbf{Z}$.

265. $]4\pi n,\ \pi(12n+1)/3[\ \cup\ ]\pi(12n+5)/12,\ 2\pi+4\pi n[$, $n\in\mathbf{Z}$.

266. $[\pi(12n-7)/6;\ \pi(12n+1)/6]$, $n\in\mathbf{Z}$. **267.** $\pi(4n-1)/2$, $n\in\mathbf{Z}$.

268. $]\pi(8n+3)/4;\ \pi(8n+5)/4[$, $n\in\mathbf{Z}$. **269.** $]\pi n;\ \pi(2n+1)/2[$, $n\in\mathbf{Z}$.

270. $]\pi(2n-1)/2;\ \pi(3n-1)/3[$, $n\in\mathbf{Z}$. **271.** $]\pi(8n-3)/4;\ \pi(8n+1)/4[$, $n\in\mathbf{Z}$.

272. $]\pi(8n-1)/4;\ 2\pi n[\ \cup\ ]\pi(8n+1)/4;\ \pi(8n+3)/4[\ \cup$ $\cup\ ]\pi+2\pi n;\ \pi(8\pi+5)/4[$, $n\in\mathbf{Z}$. **273.** $]\pi(6n-1)/3;\ 2\pi(3n+1)/3[$, $n\in\mathbf{Z}$. **274.** $]\pi(4n+1)/4;\ \pi(3n+1)/3[$, $n\in\mathbf{Z}$.

275. $[2\pi(3n+1)/3,\ \pi+2\pi n]\ \cup\ [2\pi(3n-1)/3;\ 2\pi n]$, $n\in\mathbf{Z}$.

276. $[2\pi(3n-1)/3;\ 2\pi(3n+1)/3]$, $n\in\mathbf{Z}$. **277.** $[\pi(12n-7)/6;\ \pi(12n+1)/6]$, $n\in\mathbf{Z}$. **278.** $\{(\pi n, 1/2)\mid n\in\mathbf{Z}\}$. **279.** $\pi+2\pi n$, $\pi(12k\pm 5)/6$ $(n, k\in\mathbf{Z})$. **280.** 0; $\pi/4$; $\pi/2$; $5\pi/4$. **281.** $-\pi/2$; $-\pi/6$; 0; $\pi/6$; $\pi/2$; $5\pi/6$; π. **282.** $\pi(8n+3)/4$ $(n\in\mathbf{Z})$.

283. $\{(\pi(6n+6k-1)/6,\ \pi(6n-6k-1)/6),\ (\pi(6n+6k+1)/6,\ \pi(6n-6k+1)/6)\}$ $(n, k\in\mathbf{Z})$.

284. $\{(\pi(6k+6m-1)/6,\ \pi(6k-6m-1)/6),\ (\pi(6k+6l+1)/6,\ \pi(6k-6l+1)/6)\}$ $(k, m, l\in\mathbf{Z})$.

285. $\{(\pi/6;\ 2\pi/3),\ (5\pi/6;\ 2\pi/3)\}$. **286.** $\{(n,\ (4n+1)/4),\ ((4n-1)/4,\ n)\}$ $n\in\mathbf{Z}$.

287. $\{(\pi(6k+6n\pm 1)/6;\ \pi(2k-2n\pm 1)/2),\ (\pi(2k+2n\pm 1)/2;\ \pi(6k-6n\pm 1)/6)\}$ $(k, n\in\mathbf{Z})$. Замечание. Здесь кратко записаны четыре группы значений; верхнему знаку в формуле для x соответствует верхний же знак в формуле для y, а нижнему знаку в формуле для x соответствует нижний знак в формуле для y. Этим правилом удобно пользоваться и при различных вычислениях.

288. $\{(-\pi(12n-5)/12;\ \pi(3n+1)/3),\ (-\pi(12n-1)/12;\ \pi(3n+2)/3)\}$ $(n\in\mathbf{Z})$.

289. $\left\{\left((-1)^n\arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{12}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}-(-1)^n\arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}}-\pi n\right)\right\}$ $(n\in\mathbf{Z})$.

290. $\{(\pi(2n+1)/2;\ -\pi(6n-1)/6)\}$ $(n\in\mathbf{Z})$.

291. $\{(\pi(4m+1)/4;\ \pi(8n-4m+1)/4)\}$ $(n, m\in\mathbf{Z})$.

292. $\left\{\left(\dfrac{13}{2}\pi+\arccos((\sqrt{57}-6)/3)+2\pi n,\ \arccos((\sqrt{57}-6)/3)+2\pi n\right);\right.$ $\left.\left(\dfrac{13}{2}\pi-\arccos((\sqrt{57}-6)/3)+2\pi n,\ -\arccos((\sqrt{57}-6)/3)+2\pi n\right)\right\}$ $(n\in\mathbf{Z})$.

293. $\{(\pi(6n+(-1)^n)/6,\ (-1)^k\arcsin(3/4)+\pi k)\}$ $(n, k\in\mathbf{Z})$.

294. $\{(\pi(8n-1)/4;\ \operatorname{arctg}3+\pi k)\}$ $(n, k\in\mathbf{Z})$.

295. $\{(\pi(8n \pm 3)/4;\ \pi(6k+(-1)^k)/6)\}$ $(n,\ k \in \mathbf{Z})$.

296. $\{(\arccos(3/4) + 2\pi k;\ -\arccos(1/8) + 2\pi n);\ (-\arccos(3/4) + 2\pi k;\ \arccos(1/8) + 2\pi n)\}$ $(n,\ k \in \mathbf{Z})$. Решение. Из первого уравнения $6\cos x = 5 - 4\cos y$, из второго $6\sin x = -4\sin y$. Возводя в квадрат и складывая, получаем $\cos y = 1/8$ или $y = \pm\arccos(1/8) + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$. Тогда из первого уравнения системы $\cos x = 3/4$, или $x = \pm\arccos(3/4) + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Так как при возведении в квадрат мы могли получить посторонние корни, то непосредственной подстановкой найденных значений во второе уравнение, убеждаемся, что из четырех комбинаций знаков годятся только две:

$$x_1 = \arccos(3/4) + 2\pi k, \quad y_1 = -\arccos(1/8) + 2\pi n,$$
$$x_2 = -\arccos(3/4) + 2\pi k, \quad y_2 = \arccos(1/8) + 2\pi n.$$

297. $\{(\pi m;\ 2\pi n);\ (2\pi m - \arccos(1/7);\ 2\pi(3n+1)/3);\ (2\pi m + \arccos(1/7);\ 2\pi(3n-1)/3)\}$ $(m,\ n \in \mathbf{Z})$. Указание. Перемножив уравнения почленно, после преобразований получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2(y/2) = 4\sin^2 y.$$

Оно имеет три серии решений

$$y_1 = 2\pi n, \quad y_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \qquad y_3 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Каждое из найденных значений y подставим в оба уравнения исходной системы.

Для $y_1 = 2\pi n$ получим

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = \pi m.$$

Для $y_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x - 5\sin x = 3\sqrt{3}, \\ 3\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\cos x = 1/7,\ \sin x = -4\sqrt{3}/7, \text{ т. е. } -\pi/2 < x < 0,\ x_2 = 2\pi m - \arccos(1/7).$$

Для $y_3 = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l$ аналогично получим

$$\cos x = 1/7,\ \sin x = 4\sqrt{3}/7,$$

т. е. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, следовательно, $x_3 = 2\pi m + \arccos(1/7)$.

298. $\{(\pi(6n+1)/3;\ \pi(6m-1)/3);\ (\pi(6n-1)/3;\ \pi(6m+1)/3)\}$ $(m,\ n \in \mathbf{Z})$.

299. $\{(\pi(4m+1)/4;\ \pi(6n \pm 1)/3);$

$$((\pi m + (-1)^m \arcsin\sqrt{2/3})/2;\ 2\pi n \pm \arccos\sqrt{2/3});$$

$$((\pi m - (-1)^m \arcsin\sqrt{2/3})/2;\ 2\pi n \pm (\pi - \arccos\sqrt{2/3}))\} \quad (m,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Решение. Так как $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$, то первое уравнение данной системы перепишем так:

$$(4\cos^2 y - 1) = (2\cos y - 1)(1 + 2\sin 2x) \Rightarrow (2\cos y - 1)(2\cos y + 1 - 1 - 2\sin 2x) =$$
$$= 0 \Rightarrow 2\cos y - 1 = 0 \text{ или } \cos y - \sin 2x = 0.$$

В первом случае $\cos y = 1/2 \Rightarrow y = \pi(6n \pm 1)/3$ $(n \in \mathbf{Z})$. Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\right) = \pm\frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = 2 \Rightarrow (\operatorname{tg}^3 x)^2 - 2(\operatorname{tg}^3 x) + 1 =$$
$$= 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi(4m+1)/4 \qquad (m \in \mathbf{Z}).$$

Итак, решением системы является множество

$$(\pi(4m+1)/4;\ \pi(6n\pm 1)/3)\qquad (n,\ m\in \mathbf{Z}).$$

Во втором случае $\cos y=\sin 2x$. Тогда второе уравнение системы принимает вид

$$\sin y\left(\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^3 x\cos^3 x}\right)=3\frac{\cos y}{\sin y}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin^2 y\,((\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x)-$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^2 x+\cos^2 x))=3\cos y\,(\sin x\cos x)^3\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (1-\cos^2 y)\,((\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3(\sin x\cos x)^2)=$$
$$=3\cos y\,(\sin x\cos x)^3\Longrightarrow (1-\sin^2 2x)\left(1-\frac{3\sin^2 2x}{4}\right)=$$
$$=3\sin 2x\frac{\sin^3 2x}{8}\Longrightarrow 3\sin^4 2x-14\sin^2 2x+8=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\sin^2 2x-4)(3\sin^2 2x-2)=0.$$

Первый сомножитель $\sin^2 2x-4\neq 0$ при $x\in \mathbf{R}$. Второй сомножитель приравниваем нулю, тогда

$$3\sin^2 2x=2\Longrightarrow \sin 2x=\pm\sqrt{2/3}.$$

В случае $\sin 2x=\sqrt{2/3}\Longrightarrow x=(\pi m+(-1)^m\arcsin\sqrt{2/3})/2$ $(m\in \mathbf{Z})$, а так как $\cos y=\sin 2x=\sqrt{2/3}$, то $y=\pi n\pm\arccos\sqrt{2/3}$ $(n\in \mathbf{Z})$. Аналогично, в случае $\sin 2x=-\sqrt{2/3}$ получаем $x=(\pi m-(-1)^m\arcsin\sqrt{2/3})/2$ и $y=\pi n\pm(\pi-\arccos\sqrt{2/3})$ $(m,\ n\in \mathbf{Z})$.

300. $\{x=\pi(4k\pm 1)/4,\ y=\pm\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ z=\pi-x-y\}$ $(n,\ k\in \mathbf{Z})$. Замечание. Верхнему знаку у x соответствует верхний знак у y; нижнему — нижний.

301. $(x;\ y)\in\{(1/2;\ -1/2),\ (-1/2;\ 1/2),\ (1;\ 0),\ (-1;\ 0),\ (0;\ 1);\ (0;\ -1)\}$.

302. $\{(\pi m;\ \pi l)\}$ $(m,\ l\in \mathbf{Z})$.

303. $$\left\{\left(\frac{\pi}{8}-\arccos\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\arccos\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}-2\pi n\right);\right.$$
$$\left.\left(\frac{\pi}{8}+\arccos\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{8}-\arccos\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}-2\pi n\right)\right\}$$
$$(n\in \mathbf{Z}),\ a\in[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}].$$

304. $\{(\operatorname{arctg}(a-1)+\pi n;\ (-1)^k\arcsin(a+1)+\pi k)\}$ $(n,\ k\in \mathbf{Z})$ при $a\in[-2,0]$, $\{(\operatorname{arctg}(a+1)+\pi n;\ (-1)^k\arcsin(a-1)+\pi k)\}$ $(n,\ k\in \mathbf{Z})$ при $a\in[0;\ 2]$.

305. $\{(\pi(6n\pm 1)/3;\ \pi(6m+1)/6),\ (\pi(6n\pm 1)/6;\ \pi(6m-1)/3)\}$ $(n,\ m\in \mathbf{Z})$.

306. $\{(\pi(1-2(n-m))/2;\ \pi n/2),\ (\pi(6(m-2l)+3\pm 4)/6;\ \pi(3l\mp 1)/3)\}$ $(n,\ m,\ l\in \mathbf{Z})$. Замечание. В формулах надо брать или верхние знаки, или нижние.

307. $$\left\{\left(\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{2}{5}+(-1)^m\arcsin\frac{4}{5}+\pi(n+m)\right);\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{2}{5}-(-1)^m\arcsin\frac{4}{5}+\pi(n-m)\right)\right)\right\}\quad (n,\ m\in \mathbf{Z}).$$

308. $\{(\pi(8n+1)/4;\ \pi(8k+5)/4)\}$ $(n,\ k\in \mathbf{Z})$. 309. $\{(\pi(8n-3)/4)^4,\ n\in \mathbf{N}\}$.

310. $\{(\pi(8k+1)/2;\ \pi(4k+1)/2)\}$ $(k\in \mathbf{Z})$. 311. $\{4\pi k\}$ $(k\in \mathbf{Z})$.

312. $\{(\pi(4m-(-1)^n)/8;\ (\pi n-\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}))/5\}\}$ $(n,\ m\in \mathbf{Z})$.

313. $\{((\pi(8n+1)-6)/4;\ 1\}$ $(n\in \mathbf{Z})$. 314. $\{(\pi/3;\ \pi/6);\ (5\pi/12;\ \pi/6);\ (\pi/12;\ 11\pi/6)\}$.

1. $a_1=13$, $d=-1$. Решение. Для арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$. Выразив слагаемые через a_1 и d, получим

$$\begin{cases} a_1+3d=10, \\ 2a_1+9d=17. \end{cases}$$

Из первого уравнения $a_1=10-3d$. Тогда $2(10-3d)+9d=17 \Rightarrow d=-1$, $a_1=13$.

2. Доказательство. $S_n=2n^2-3n$, $S_{n-1}=2(n-1)^2+3(n-1)=2n^2-n-1$; $a_n=S_n-S_{n-1}=4n+1$, $a_{n-1}=4(n-1)+1=4n-3$; $d=a_n-a_{n-1}=4n+1-(4n-3)=4$ постоянна, следовательно, эта последовательность — арифметическая прогрессия.

3. 1; 9; 17. **4.** 610. **5.** $a_1=-2$; $d=1$. **6.** 69; 87. **7.** 44. **8.** $(116k-39)/90$. **9.** $a_1=-1$; $d=2$. **10.** 7. **11.** 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,25. **12.** 11,2; 18,4; 25,6; 32,8. **13.** 164850. **14.** 7. **15.** $a_1=5$, $d=4$. **16.** 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. **17.** 5. **18.** $a_1=4$, $d=5$ или $a_1=-79/7$, $d=-37/14$. **19.** $d=-5/4$. **20.** $d=33/20$. **21.** 26. **22.** $a_1=8$. $d=4$.

23. Могут; тупоугольный; $\hat{A}=\arccos(-29/48)=\pi-\arccos(29/48)$, $\hat{B}=\arccos(61/72)$, $\hat{C}=\arccos(101/108)$. Решение. По условию задачи имеем $(a, b, c>0)$

$$\begin{cases} 2\lg b=\lg a+\lg c, \\ 2(\lg 2b-\lg 3c)=\lg 3c-\lg 2b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b^2=ac, \\ 2b=3c. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно a и b, получим $a=9c/4$, $b=3c/2$. Итак, тройка чисел, удовлетворяющая условиям задачи, будет $9c/4$, $3c/2$, c $(c\neq 0)$. Для того чтобы отрезки длиной $a=9c/4$, $b=3c/2$ и c могли образовать треугольник, достаточно проверить выполнение условий 1) $a+b>c$, 2) $b+c>a$, 3) $a+c>b$. Но так как $a+b=15c/4>c$, $b+c=5c/2>9c/4=a$ и $a+c=13c/4>3c/2=b$ $(c>0)$, то треугольник с длинами сторон a, b, c существует, и так как $a^2>b^2+c^2$, то он тупоугольный. Для нахождения углов этого треугольника воспользуемся теоремой косинусов, откуда

$$\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{29}{48}, \quad \cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{61}{72},$$
$$\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{101}{108}.$$

Таким образом, учитывая, что $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — углы треугольника, получаем

$$\hat{A}=\arccos(-29/48)=\pi-\arccos(29/48), \quad \hat{B}=\arccos(61/72),$$
$$\hat{C}=\arccos(101/108).$$

24. $d=24/11$. **25.** $d=12/5$. **26.** 101100. **27.** $(6-\sqrt{6})/6$; 1; $(6+\sqrt{6})/6$. **29.** $a\in[12; +\infty[$. **30.** 19680. **31.** 1/5; 1; 5; 25.

32. 728. Решение. Из условия

$$\begin{cases} b_4-b_1=52, \\ b_1+b_2+b_3=26, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1q^3-b_1=52, \\ b_1+b_1q+b_1q^2=26, \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b_1(q^3-1)=52, \\ b_1(1+q+q^2)=26, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q-1)(q^2+q+1)=52, \\ b_1(1+q+q^2)=26. \end{cases}$$

Поделим левые и правые части уравнений и получим $q-1=2$, $q=3$. Подставим значение q в первое уравнение. Получим $b_1=2$. Так как $S_n=b_1(q^n-1)/(q-1)$, то $S_6=2\cdot(3^6-1)/(3-1)=728$.

33. 8190. **34.** 8/3 или 5000/3. **35.** 5; 10; 20. **36.** 12 или 108/7. **37.** 121. **38.** $b_1=3{,}5$; $q=-2$. **39.** 0. **40.** 2; 6; 18 или 18; 6; 2. **41.** 31. **42.** 4; 12; 36; 108. **43.** $-2/5$.

44. 1; 3; 9. Решение. По условию задачи $b_1+b_2+b_3=13$ и $b_1^2+b_2^2+b_3^2=91$, т. е. имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=13, \\ b_1^2(1+q^2+q^4)=91. \end{cases}$$

Возведем левую и правую части первого уравнения системы в квадрат, тогда получим

$$b_1^2(1+q+q^2)^2=169 \Rightarrow b_1^2(1+q^2+q^4)+2b_1^2q(1+q+q^2)=169 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1^2(1+q^2+q^4)+2b_1q\cdot b_1(1+q+q^2)=169 \Rightarrow 91+2b_1q\cdot 13=169 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1q=3 \Rightarrow b_1=3q/.$$

Подставляя $b_1=3/q$ в первое уравнение системы, после преобразований получим $3q^2-10q+3=0$. Решая это уравнение, находим $q=3$ или $q=1/3$. Тогда соответствующие значения b_1 будут $b_1=1$ или $b_1=9$. Следовательно, искомая прогрессия в первом случае будет 1; 3; 9, а во втором 9; 3; 1. Искомые числа в обоих случаях 1; 3; 9.

45. 0; 0 или 10/3; 4/3 или $-3/4$; $-3/10$. **46.** 6. **47.** 1/625 или 15625. **48.** 2. **49.** 5 или 20. **50.** 4; 8; 16. **51.** 10; 6; 2 или -6; 6; 18. **52.** -2. **53.** 22,5 или 2,5. **54.** 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **55.** 75/4; 45/4; 27/4; 9/4 или 3; 6; 12; 18. **56.** 12,2 (заданные числа 27,8; 20; 12,2 или 17; 20; 23). **57.** $b_1=8$; $q=-0{,}5$ или $b_1=24/19$; $q=3/2$. **58.** 186. **59.** 2; 6; 18. **60.** 27 или 3. **61.** 1; $3-2\sqrt{2}$; $3+2\sqrt{2}$. **62.** -2 или 1. **63.** -2. **64.** 1; 3; 9 или 1/9; 7/9; 49/9. **65.** 931. **66.** 8 задач; 127,5 мин. 67. $1-1\sqrt{3}$; 3. **68.** 100/3. **69.** $(3\pm\sqrt{5})/2$. **70.** 2; $-1/2$; 1/8. **71.** 1/16. **72.** $b_1=6$; $q=-1/2$. **73.** Если прогрессия геометрическая, то $x=\pm 2\sqrt{6}/11$; $S_4=(3\pm 2\sqrt{6})/3$; если прогрессия арифметическая, то $x=1/2$; $S_4=27/11$. **74.** 4. **75.** 486. **76.** 4. **77.** $S^2/(2S-1)$. **78.** $b_1=1$; $q=1/3$. **79.** 9/8. **80.** 2; 4; 8. **81.** $a=3$; $b=6$ или $a=27$; $b=18$. **82.** $x=1-\log_2 5$. **83.** 217/30. **84.** 4. **85.** 8/3, **86.** $b_1=405$ $q=-2/3$. **87.** $b_1=3/19$; $q=17/19$. **88.** $b_1=2$; $q=1/3$.

§ 13

1. 50 км/ч. Решение. Пусть v км/ч — скорость поезда до остановки. Тогда $(v+10)$ км/ч — скорость на перегоне в 80 км после остановки. По расписанию поезд должен проехать этот перегон за $80/v$ ч, а затратил на самом деле $80/(v+10)$ ч. Из условия

$$\frac{80}{v}-\frac{80}{v+10}=\frac{16}{60}.$$

Преобразуя последнее уравнение, получим $v^2+10v-3000=0$, откуда $v=50$ км/ч.

2. 25 км/ч. **3.** 16 км/ч. **4.** $(-c+\sqrt{c^2+16ac-16bc})/2$, если $a>b$.

5. 6 км/ч. Решение. По условию задачи пешеходы встретились через 5 часов. Следовательно, за час они проходили $50:5=10$ км. Если v_1 и v_2 —

скорости пешеходов, то $v_1+v_2=10$. Первый пешеход прошел до встречи $5v_1$ км, а второй прошел этот путь за $5v_1/(v_2+1)$ ч. Второй пешеход прошел до встречи $5v_2$ км, а первый прошел этот путь за $5v_2/(v_1-1)$ ч. Так как второй шел после встречи на 2 ч дольше, то

$$\frac{5v_1}{v_2+1}-\frac{5v_2}{v_1-1}=2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} v_1+v_2=10, \\ \dfrac{5v_1}{v_2+1}-\dfrac{5v_2}{v_1-1}=2. \end{cases}$$

Решив ее, получим $v_1=6$.

6. 75,6 км/ч, 147 м. Указание. Если l м — длина поезда, то $l/7=(378+l)/25$. **7.** 720 км.

8. 30 км/ч, 40 км/ч. Решение. Если v_1 и v_2 — скорости поездов, то $v_1+v_2=70$; в 14 ч расстояние между поездами равно $2v_1$ км. Каждый час это расстояние уменьшается на (v_2-v_1) км $(v_2>v_1)$. Так как второй поезд догонял первый $20-14=6$ ч, то $2v_1=6(v_2-v_1)$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} v_1+v_2=70, \\ 2v_1=6(v_2-v_1); \end{cases}$$

отсюда $v_1=30$ км/ч, $v_2=40$ км/ч.

9. 4 км/ч; 16 км/ч. **10.** 18 км/ч, 24 км/ч. **11.** $v_1=10$ км/ч, $t_1=3{,}5$ ч; $v_2=8$ км/ч; $t_2=3$ ч или $v_1=14$ км/ч, $t_1=2{,}5$ ч; $v_2=12$ км/ч, $t_2=2$ ч. **12.** 12 км/ч, 16 км/ч.

13. 30 км/ч. Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 — скорости машин. Тогда, исходя из условия, что три машины отправляются из пункта A через равные промежутки времени, можем записать

$$\frac{|AB|}{v_1}-\frac{|AB|}{v_2}=\frac{|AB|}{v_2}-\frac{|AB|}{v_3}.$$

Так как вторая машина прибыла в C на 1 ч раньше первой, то получим второе уравнение

$$\frac{120}{v_1}-\frac{120}{v_2}=1.$$

Из условия следует, что третья машина прошла $120+40=160$ км за то же время, за которое первая машина прошла $120-40=80$ км. Поэтому третье уравнение получаем такое:

$$\frac{160}{v_3}=\frac{80}{v_1}.$$

Итак, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{|AB|}{v_1}-\dfrac{|AB|}{v_2}=\dfrac{|AB|}{v_2}-\dfrac{|AB|}{v_3}, \\ \dfrac{120}{v_1}-\dfrac{120}{v_2}=1, \\ \dfrac{160}{v_3}=\dfrac{80}{v_1}. \end{cases}$$

Решив ее, получим $v_1=30$ км/ч.

14. 18 км/ч; 24 км/ч. **15.** 240 км. **16.** $20\sqrt{3}$ км. **17.** 35 км/ч. **18.** 4 ч.

19. 24 км.

20. 0,03 м/с; 0,05 м/с. Указание. В задачах на движение тел по окружности нужно иметь в виду следующее. Если два тела начали двигаться из одной точки в одном направлении с разными скоростями, то тело с большей скоростью может догнать другое тело, если разница между пройденными расстояниями будет равна длине окружности. В данной задаче пусть v_1 и v_2 — скорости точек и $v_1 > v_2$. Тогда

$$\begin{cases} 60v_1-60v_2=1{,}2, \\ 15v_1+15v_2=1{,}2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $v_1=0{,}03$ м/с; $v_2=0{,}05$ м/с.

21. 180 км, **22.** 1 м/с. **23.** 56 км. **24.** 60 км/ч. **25.** $t_п=21$ ч, $t_т=28$ ч. **26.** 2 ч шел, 6 ч плыл. **27.** I — 200 км, II — 100 км. **28.** 4 км/ч; 6 км/ч. **29.** 15 км. **30.** 20 м/мин; 15 м/мин.

31. $(1+\sqrt{3})/2$, $(2\mp\sqrt{2})/2$. Указание. Обозначив $|KM|$ через s, а $t_м/t_а=v_а/v_м=x$, из условия задачи получим

$$\begin{cases} |s-(0{,}4s+0{,}4s\cdot x)|=4, \\ \left|s-\left(0{,}5s+\dfrac{0{,}5s}{x}\right)\right|=10. \end{cases}$$

После преобразований система сводится к уравнению

$$2\,|1{,}5-x|=\left|1-\frac{1}{x}\right|.$$

Решив его, получим

$$x=(1+\sqrt{3})/2,\ x=(2\mp\sqrt{2})/2.$$

32. 50 м³/мин.

33. I — $(5a-2-\sqrt{25a^2+4a+4})/4$ ч,
II — $(5a+2+\sqrt{25a^2+4a+4})/4$ ч, III — $(5a-2+\sqrt{25a^2+4a+4})/2$ ч.

34. 20 дн., 30 дн.

35. 30 ч. Решение. Пусть первая труба наполняет бассейн за x ч, тогда за 1 ч она наполнит $1/x$ часть бассейна, а вторая труба — $1/(x+10)$ часть бассейна. Так как по условию обе трубы наполняют в 1 ч 1/12 часть, то

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}.$$

Отсюда $x=30$ ч.

36. 20 ч; 25 ч. **37.** 12 ч; 15 ч. **38.** 11 ч; 14 ч. **39.** 5; 7. **40.** Производительность труда второго рабочего в 1,5 раза выше, чем первого. **41.** 6 ч; 9 ч или 9 ч; 6 ч.

42. III бригада. Решение. Обозначим через x, y и z — производительности I, II и III бригад соответственно. По условию

$$\begin{cases} x+z=2y, \\ y+z=3x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{z}+1=2\cdot\dfrac{y}{z}, \\ \dfrac{y}{z}+1=3\cdot\dfrac{x}{z}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x/z=3/5$, $y/z=4/5$, т. е. $x:y:z=3:4:5$. Итак, победила третья бригада.

43. 8. **44.** 10 дн.

45. 3 ч. Решение. Пусть x, y, z, u и v—производительности I, II, III, IV, и V рабочего соответственно. Из условия следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{15}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

В полученной системе пять неизвестных, а уравнений четыре. Но не следует искать каждое неизвестное. В задаче требуется найти сумму $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)$. Способов решения такой системы много. Укажем, например, такой. Левую и правую части четвертого уравнения умножим на 2, а затем сложим левые и правые части всех уравнений; получим

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=1, \text{ т. е. } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{3}.$$

46. 8 ч; 6 ч. **47.** $27{,}5\,(3-\sqrt{5})$ км/ч; $27{,}5\,(\sqrt{5}-1)$ км/ч. **48.** 9 дн. **49.** 6 дн; 12 дн. **50.** 3 км/ч. **51.** 10 км/ч; 15 км/ч. **52.** 4 км/ч.

53. $\sqrt{3/2}$. Решение. Пусть $v_к$—скорость катера в стоячей воде и $v_т$—скорость течения реки. Из условия задачи имеем

$$\frac{|AB|}{2v_к+v_т}+\frac{|AB|}{2v_к-v_т}=\frac{1}{5}\left(\frac{|AB|}{v_к+v_т}+\frac{|AB|}{v_к-v_т}\right)$$

или

$$\frac{|AB|}{v_т}\left(\frac{1}{2\frac{v_к}{v_т}+1}+\frac{1}{2\frac{v_к}{v_т}-1}\right)=\frac{|AB|}{5v_т}\left(\frac{1}{\frac{v_к}{v_т}+1}+\frac{1}{\frac{v_к}{v_т}-1}\right).$$

Разделив обе части на $|AB|/v_т$, получим уравнение с неизвестным $v_к/v_т$, откуда $v_к/v_т=\sqrt{3/2}$.

54. 12,5 км/ч. **55.** $v_т=3$ км/ч; $v_л=9$ км/ч. **56.** 20. **57.** 100. **58.** 3150; 3450. **59.** 24. **60.** A— 20; B— 30. **61.** Рядов—20, стульев—25. **62.** 54; 75. **63.** 10. **64.** 40 по 2,5 руб. и 24 по 1,5 руб. **65.** 18. **66.** 32. **67.** 49. **68.** $(3+\sqrt{5})/2$ и $(1+\sqrt{5})/2$ или $(3-\sqrt{5})/2$ и $(1-\sqrt{5})/2$. **69.** 863. **70.** 6 и 54. **71.** 5 и 105 или 15 и 35. **72.** 3/5. **73.** 72. **74.** 54 и 45. **75.** 90 и 24. **76.** 78 и 13 или 26 и 39.

77. 51 и 34. Решение. Пусть эти числа a и b, d—их общий наибольший делитель; тогда $a=a_1d$, $b=b_1d$. Наименьшее общее кратное чисел a и b есть a_1b_1d, причем a_1 и b_1 не имеют общих множителей. Тогда $a_1b_1d=102=1\cdot2\cdot3\cdot17$, $(a_1+b_1)\,d=85=1\cdot5\cdot17$. Следовательно, $d=1$ или $d=17$. В первом случае $ab=102$, $a+b=85$ и числа a и b не целые. Во втором случае $a_1b_1=6$, $a_1+b_1=5$, $a_1=3$, $b_1=2$ или $a_1=2$, $b_1=3$, тогда данные числа равны 51 и 34.

78. 28 и 27 или 8 и 3. **79.** 137.

80. 813. Решение. Пусть x, y, z—цифры данного трехзначного числа. Тогда $100x+10y+z$—данное число, а $100z+10y+x$—число, записанное этими цифрами в обратном порядке.

По условию

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=74, \\ x+z=2y, \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=495. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $x=8$; $y=1$; $z=3$.

81. 13 или 31. **82.** 24. **83.** 3 и 7. **84.** 25%. **85.** 2 кг при $p>60$, a кг, где $a\in[0;\ 2]$, при $p=60$, 0 кг при $0<p<60$. **86.** 6; 8. **87.** [0; 20] м/с. **88.** В 2 раза, **89.** 2,4 кг или 80%. **90.** 4 кг, 6 кг. **91.** 243 л. **92.** I—7 кг, II—21 кг. **93.** 99. **94.** 35.

95. 0,5 л глицерина и 3,5 л воды. Решение. Если через v л обозначить объем сосуда, то после первой операции (замена двух литров глицерина водой) глицерин займет $(v-2)/v$-ю часть сосуда. Отлив 2 литра смеси, получим $(v-2)\times\times\dfrac{v-2}{v}$ л глицерина в сосуде и после доливания воды глицерина будет занимать $\left(\dfrac{v-2}{v}\right)^2$-ю часть сосуда. После третьей операции глицерин займет $\left(\dfrac{v-2}{v}\right)^3$-ю часть сосуда, а количество глицерина в сосуде будет равно $v\left(\dfrac{v-2}{v}\right)^3$ л. По условию задачи воды в сосуде на 3 л больше, т. е.

$$v\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3.$$

Складывая эти количества, получаем уравнение

$$2v\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3=v,$$

откуда

$$v^3-9v^2+24v-16=0;$$

левую часть этого уравнения разложим на множители

$$(v-1)(v-4)^2=0.$$

Отсюда $v=4$ л ($v=1$ л не подходит по смыслу задачи), значит, объем глицерина равен

$$v\left(\frac{v-2}{v}\right)^3=0{,}5 \text{ л}.$$

96. 170 кг. **97.** 4 кг. **98.** 25%. **99.** 166 р. **100.** 12%. **101.** $(12\sqrt{78}-100)\%$. **102.** 20%. **103.** 4 с. **104.** Высота $h\in\left[1;\ (5-\sqrt{5})/2\right]$. **105.** $v_л\in\left[4;\ (8+\sqrt{61})/3\right]$. **106.** $\left(a\sqrt{(u+w)^2-v^2}/uv\right)$ с. **107.** $t=2$ ч, если $|BC|\geqslant 120$ км, $t=|BC|/60$, если $0<|BC|<120$ км. **108.** 2 ч. **109.** $v\in]5;\ 15[$ в км/ч. **110.** Через 3,6 ч. **111.** 25 км.

112. 3,75 км.

113. 18 км/ч. **114.** $x_1=1{,}25$; $x_2=2$; $x_3=0{,}5$. **115.** $-0{,}5$. **116.** 0,25 **117.** $x_1=x_2=10$. **118.** 9 км от A. **119.** 12 м/с; 28 м.

120. 7/9. Решение. Введем обозначения. Поезд, вышедший из пункта A, имел ускорение a_1; через t_1 ч он достиг скорости $v_1=a_1t_1$, с которой и продолжал двигаться, пока не прибыл в пункт B; в пути первый поезд, так же как и второй, находился t_4 ч. Второй поезд, вышедший из пункта B, имел ускорение $a_2 \neq a_1$ (для определенности будем считать $a_2 < a_1$, в противном случае решение будет такое же, только поменяются роли первого и второго поезда), через t_2 он достиг скорости $v_2=a_2t_2$, с которой и продолжал двигаться, пока не прибыл в пункт A. Обозначим $a_2/a_1=x < 1$. По условию задачи при встрече (этот момент обозначим t_3) поезда имели равные скорости. Это возможно лишь при условии, что к моменту встречи один из поездов (тот, у которого ускорение было больше, у нас это первый поезд) двигался уже равномерно с постоянной скоростью (у нас $v_1=a_1t_1$), а другой еще продолжал равноускоренное движение (и имел в момент t_3 скорость a_2t_3). По условию задачи эти скорости равны, т. е. $a_2t_3=a_1t_1$, откуда

$$t_3=t_1/x. \qquad (1)$$

Скорость равномерного движения первого поезда $v_1=a_1t_1$, а второго поезда $v_2=a_2t_2 > v_1$, по условию задачи $v_2=4v_1/3 \Rightarrow a_2t_2=4a_1t_1/3$, и, следовательно,

$$t_2=4t_1/3x. \qquad (2)$$

Путь, пройденный вторым поездом до момента встречи, $s_1=a_2t_3^2/2$, это путь, пройденный первым поездом после момента встречи, т. е. $s_1=v_1(t_4-t_3)= = a_1t_1(t_4-t_3)$. Следовательно,

$$\frac{a_2t_3^2}{2}=a_1t_1(t_4-t_3),$$

или, учитывая соотношение (1) и то, что $a_2=a_1x$, получим

$$\frac{a_2t_1^2}{2x^2}=a_1t_1\left(t_4-\frac{t_1}{x}\right) \Rightarrow \frac{t_1^2}{2x}=t_1t_4-\frac{t_1^2}{x} \Rightarrow t_1t_4=\frac{3t_1^2}{2x};$$

так как $t_1 \neq 0$, то отсюда получаем

$$t_4=3t_1/2x. \qquad (3)$$

По условию задачи расстояние между A и B поезда прошли за одно и то же время t_4. Подсчитаем этот путь для первого и второго поездов отдельно. Для первого поезда

$$s=\frac{a_1t_1^2}{2}+v_1(t_4-t_1)=\frac{a_1t_1^2}{2}+a_1t_1\left(\frac{3t_1}{2x}-t_1\right)=\frac{3a_1t_1^2}{2x}-\frac{a_1t_1^2}{2}.$$

Для второго поезда

$$s=\frac{a_2t_2^2}{2}+v_2(t_4-t_2)=\frac{a_2\cdot 16t_1^2}{18x^2}+a_2t_2\left(\frac{3t_1}{2x}-\frac{4t_1}{3x}\right)=$$

$$=\frac{8a_2t_1^2}{9x^2}+a_2\cdot\frac{4t_1}{3x}\left(\frac{3t_1}{2x}-\frac{4t_1}{3x}\right)=\frac{2a_2t_1^2}{x^2}-\frac{8a_2t_1^2}{9x^2}=\frac{10a_2t_1^2}{9x^2}=\frac{10a_1t_1^2}{9x}.$$

Приравнивая эти значения и деля правую и левую часть на $a_1t_1^2$, получим

$$\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{10}{9x} \Rightarrow \frac{27}{18x}-\frac{20}{18x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{7}{9}=\frac{a_2}{a_1}.$$

121. 10 км/ч. Решение. Если $|AC| = x$ км, то

$$\frac{x}{v_0}+\frac{120-x}{v_1}=\frac{x}{v_1}+\frac{120-x}{v_0} \Rightarrow x=60.$$

Если t — время, необходимое мотоциклисту, движущемуся со скоростью v_0 км/ч, для преодоления расстояния $|AC|$, то

$$v_0 t=60, \quad v_0(8-t)+\frac{a(8-t)^2}{2}=60.$$

Учитывая условия $a=2v_0$, получаем

$$v_0^2-15v_0+50=0, \quad v_0=5 \text{ или } v_0=10.$$

$v_0=5$ не удовлетворяет условию, так как тогда на преодоление $|AC|$ уйдет уже 12 часов. Итак, $v_0=10$ км/ч.

§ 14

1. $\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$. **2.** $\cos\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $2\left(\cos\left(2\pi k+\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{5}{6}\pi\right)\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **4.** $2\left(\cos\left(2\pi k+\frac{7}{6}\pi\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{7}{6}\pi\right)\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **5.** $5(\cos(2\pi k+\pi+\operatorname{arctg}(4/3))+i\sin(2\pi k+\pi+\operatorname{arctg}(4/3)))$, $k\in\mathbf{Z}$. **6.** $5(\cos(2\pi k-\operatorname{arctg}(4/3))+i\sin(2\pi k-\operatorname{arctg}(4/3)))$, $k\in\mathbf{Z}$. **7.** $5(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$. **8.** $\sqrt{3}\left(\cos\left(2\pi k-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi k-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **9.** $\cos(360^\circ k+58^\circ)+i\sin(360^\circ k+58^\circ)$, $k\in\mathbf{Z}$. **10.** $\cos(360^\circ k-12^\circ)+i\sin(360^\circ k-12^\circ)$, $k\in\mathbf{Z}$. **11.** $\cos(360^\circ k+200^\circ)+i\sin(360^\circ k+200^\circ)$, $k\in\mathbf{Z}$. **12.** $\cos\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(2\pi k-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **13.** $\cos\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **14.** $\cos\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

15. $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(2\pi k+\alpha)+i\sin(2\pi k+\alpha))$, если $2\pi n-\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi n+\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{|\cos\alpha|}(\cos(2\pi k+\pi+\alpha)+i\sin(2\pi k+\pi+\alpha))$, если $2\pi n+\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi n+\frac{3\pi}{2}$; $k, n\in\mathbf{Z}$.

16. $\frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$, если $2\pi n<\alpha<\pi(2n+1)$; $\frac{1}{|\sin\alpha|}\left(\cos\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)$, если $\pi(2n+1)<\alpha<2\pi(n+1)$; $n, k\in\mathbf{Z}$.

17. $(1+i\sqrt{3})/2$. **18.** -16. **19.** $8i$. **20.** 8. **21.** -2^{10}.

22. $2^n\cos^n(\varphi/2)(\cos(n\varphi/2)+i\sin(n\varphi/2))$.

23. $2^n\sin^n(\varphi/2)(\cos(n(\pi-\varphi)/2)+i\sin(n(\pi-\varphi)/2))$.

25. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

26. $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **27.** i; $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$;

28. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1; $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 29. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$. 30. $\cos(2\pi k/n)+i\sin(2\pi k/n)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

31. $\{-(1+i)/2;\ (3-5i)/2\}$. 32. $\{\operatorname{ctg}(k\pi/n)\,|\,k=1, 2, \ldots, n-1\}$.

33. Указание. Достаточно доказать, что корни многочлена x^2+x+1 являются корнями многочлена $x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3k+2}$.

34. Прямые $y=\pm x$. 35. Прямые $y=0$ и $x=0$.

36. Луч $y=0$, $x\leqslant 0$. 37. $\{-1,\ 0\}$. 38. $\{0;\ -i;\ i\}$.

39. $\{0;\ -i;\ i\}$. 44. Точки прямой $y=2x+(3/2)$. 45. Точки прямой $y=-x$. 46. Точки прямой $x=-1/2$. 47. Точки прямой $y=1$.

48. Точки плоскости, расположенные над прямой $y=x$ (удовлетворяющие неравенству $y>x$).

49. Все точки плоскости, расположенные под прямой $2x+4y+3=0$.

50. Точки $x>0$, т. е. все точки правой полуплоскости.

51. Точки открытого круга с центром в точке $(0;\ -1)$ и радиуса 1.

52. Точки открытого круга с центром в точке $(0;\ 1/2)$ и радиуса 1.

53. Точки открытого кольца, ограниченного окружностями с радиусами, равными 1 и 2 и центром в точке $(-1;\ 1)$.

54. Точки открытого кольца, ограниченного окружностями с радиусами, равными 1/3 и 1 и центром в точке $(0;\ -1/3)$.

55. Точки открытого кольца, ограниченного окружностями с радиусами, равными 1/2 и 1 с центром в точке $(-1/2;\ -1/2)$.

56. Все точки плоскости, расположенные под параболой $y=(x^2+1)/2$.

57. Все точки плоскости вне прямой $x=1$, расположенные под параболой $y=-(x^2+1)/2$.

58. 3/2.

Раздел II

§ 1

1. $q=2/3$. 2. $\sqrt{2}-1$. 3. 1/2. 4. 7/8. 5. 1/2. 6. 1. 7. 4/3. 8. 0. 9. 0. 10. 0. 11. 0. 12. $-2/5$. 13. 1/2. 14. $-4/7$. 15. 48. 16. 6. 17. 10. 18. 4/3. 19. 1/8. 20. $-5/3$. 21. 8/13. 22. $-1/2$. 23. 3/4. 24. 0. 25. 1. 26. 1/3. 27. m/n. 28. $n(n+1)/2$. 29. 1/4. 30. 1/6. 31. 1/2. 32. 1/4. 33. 1/16. 34. 4/3. 35. -2. 36. 2/3. 37. 1/12. 38. 1/4. 39. 3/2. 40. $-2/9$. 41. 3. 42. 1/2. 43. 1/3. 44. 1. 45. 5. 46. 1/2. 47. 2. 48. $-\sin a$. 49. -3. 50. $\sqrt{2}$. 51. $-1/2$. 52. $-1/5$. 53. 6/5. 54. 0. 55. 5^{-5}. 56. 0. 57. $-5/2$. 58. $-1/4$. 59. 1/2.

§ 2

1. $2\sin 2x$. 2. $2x\cos 2x+(1+x)\sin 2x+2$. 3. $f(x)=4/(x^2-4)$, $f'(x)=-8x/(x^2-4)^2$. 4. $f(x)\equiv 3$, $f'(x)\equiv 0$. 9. $\pi(4n+1)/4$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 10. $x=m\pi/6$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $x=\{(\pm\arccos(2/3)+2\pi n)/6\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$. 11. $x=\{\pi(2n+1)/4;\ (\pi m+(-1)^m\arcsin(1/3))/2\,|\,n,\ m\in\boldsymbol{Z}\}$. 12. $x=\{0;\ 2\pi(3m\pm 1)/3\,|\,m\in\boldsymbol{Z}\}$. 13. $x=\{2\pi(6n\pm 1)/3\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$. 14. $x=\{2\pi(2n+1)/3\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$.

15. $x=\{\pi(4m+1)/8;\ \pi(12k+1)/12\,|\,m,\ k\in\boldsymbol{Z}\}$.

16. $x=\{\pi m/4;\ \pi(6n\pm 1)/3\,|\,m,\ n\in\boldsymbol{Z}\}$.

17. $x\in]-\infty,\ 0[\cup]2,\ +\infty[$. 18. $x\in]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$. 19. $x=[-1;\ 0[$.

20. $x \in]5; +\infty[$. **21.** $x \in]0; +\infty[$. **22.** $y_1 = C_1 \cdot e^{(\sqrt{3}-2)x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $y_2 = C_2 \cdot e^{-(\sqrt{3}+2)x}$, $C_2 \in \mathbf{R}$. **23.** $(x+2)(3x+4)$. **24.** $-\frac{3\,\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x} \sin(2\,\mathrm{tg}^3 x) \times \cos(\cos^2(\mathrm{tg}^3 x))$. **25.** $-(x^2+4x+9)/x^4$. **26.** $2(1+x^2)/(1-x^2)^2$. **27.** x^2e^x. **28.** $(6 \lg^2(x^2))/x \ln 10$. **29.** $-(6+3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2})/6x^2$. **30.** $x/(x^4-1)$. **31.** $a^2/(a^2-x^2)^{3/2}$. **32.** $1/\sin x$. **33.** $x^2/(\cos x + x \sin x)^2$. **34.** $-1/\cos x$. **35.** $(1+2x^2)/\sqrt{1+x^2}$.

36. $\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos(\sin(\sin x))$. **37.** $x^2 \sin x$.

38. Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x - 1$. Так как $f(0) = 0$, $f(x)$ — непрерывная функция, $f'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$, то при всех $x > 0$ функция $f(x)$ возрастает; поэтому $f(x) > f(0)$ при всех $x > 0$, т. е. $e^x - x - 1 > 0$ при всех $x > 0$.

39. Функция убывает при $x \in]-\infty; 2/3[\cup]2; +\infty[$ и возрастает при $x \in]2/3; 2[$.

40. Функция убывает при $x \in]-1; 0[$ и возрастает при $x \in]-\infty; -1[\cup]0, +\infty[$.

41. Функция убывает при $x \in]-1; 2[$ и возрастает при $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

42. Функция убывает при $x \in]-\infty; 0[$ и возрастает при $x \in]0; +\infty[$.

43. Функция убывает при $x \in]\log_2(4/3); 1[$ и возрастает при $x \in]-\infty; \log_2(4/3)[\cup]1; +\infty[$.

44. Локальный максимум при $x = -1$, локальный минимум при $x = 3$. Функция убывает при $x \in]-1; 3[$ и возрастает при $x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

45. Локальные минимумы при $x = -4$ и $x = 1$, локальный максимум при $x = 0$. Функция убывает при $x \in]-\infty; -4[\cup]0; 1[$ и возрастает при $x \in]-4; 0[\cup]1; +\infty[$.

46. Локальные минимумы при $x = -1$ и $x = 4$, локальный максимум при $x = 0$. Функция убывает при $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 4[$ и возрастает при $x \in]-1; 0[\cup]4; +\infty[$.

47. Локальные минимумы при $x = -1/2$ и $x = 1/2$, локальный максимум при $x = 0$. Функция убывает при $x \in]-\infty; -1/2[\cup]0; 1/2[$ и возрастает при $x \in]-1/2; 0[\cup]1/2; +\infty[$.

48. Функция возрастает при $x \in]-\infty; +\infty[$.

49. Локальный максимум при $x = 16/5$, точка разрыва при $x = 0$. Функция убывает при $x \in]-\infty; 0[\cup]16/5; +\infty[$ и возрастает при $x \in]0; 16/5[$.

50. Локальный минимум при $x = 2/3$. Функция убывает при $x \in]-\infty; 2/3[$ и возрастает при $x \in]2/3; +\infty[$.

51. Локальный максимум при $x = 1/3$. Функция убывает при $x \in]1/3; +\infty[$ и возрастает при $x \in]-\infty; 1/3[$.

52. Минимум при $x = 1$. Функция убывает при $x \in]0; 1[$ и возрастает при $x \in]1; \infty[$.

53. Минимум при $x = -1/4$.

54. Критические точки $x = 0$ и $x = 1$; минимум при $x = 1$.

55. Минимум при $x = \pm\sqrt{5}$, локальный максимум при $x = 0$.

56. Минимум при $x = 2$ и $x = 3$, локальный максимум при $x = 5/2$.

57. Локальный максимум при $x = 0$ и локальный минимум при $x = 1$.

58. Локальный максимум при $x = 0$ и локальный минимум при $x = \sqrt[3]{215}$.

59. Максимум при $x=-3$, минимум при $x=3$.

60. Максимум при $x=-\sqrt{2}$, минимум при $x=\sqrt{2}$.

61. Минимумы при $x=\pm 5$.

62. Минимум при $x=-1$.

63. Минимум при $x=-1/\sqrt{2}$ и максимум при $x=1/\sqrt{2}$.

64. $y=-9/4$ при $x\in\{\pi(12n-1)/6,\ \pi(12m-5)/6 \mid n,\ m\in \mathbf{Z}\}$.

65. При $a=-9/5$ и $b\in]36/5;\ +\infty[$ и при $a=81/25$ и $b\in]400/243;\ +\infty[$. Решение. Так как коэффициент при x^3 положителен, то максимум, если он существует, расположен левее минимума. Для нахождения экстремальных точек найдем производную данной функции, приравняем ее нулю и найдем корни квадратного уравнения; это будут $x_1=-9/(5a)$ и $x_2=1/a$. Если $a<0$, то $x_2<x_1$ и, следовательно, $x_2=x_0$, т.е. $1/a=-5/9 \Rightarrow a=-9/5$. Тогда $x_1=-9/(5a)=1$. В этой точке $f(x)$ имеет локальный минимум, который должен быть >0. Имеем $f(1)=-\dfrac{36}{5}+b>0$, т.е. $b>36/5$. Если $a>0$, то $x_1<x_2$ и, следовательно, $x_1=x_0$, т.е. $-9/5a=-5/9 \Rightarrow a=81/25$. Тогда точка минимума $x_2=1/a=25/81$. В этой точке $f(25/81)=-\dfrac{400}{243}+b>0$, т.е. $b>400/243$. Итак, экстремумы $f(x)$ будут положительны при $a=-9/5$ и $b\in]36/5;\ +\infty[$ и при $a=81/25$ и $b\in]400/243;\ +\infty[$.

66. При $a=-2$ и $b\in]-\infty;\ -11/27[$ и при $a=3$ и $b\in]-\infty;\ -1/2[$.

67. При $a=-1/3$ и $b\in]-\infty;\ -5/9[$ и при $a=1$ и $b\in]-\infty;\ -1[$.

69. Если $p>0$, то $a\in]p;\ (32p^3+27p)/27[$; если $p=0$, то $a\in\varnothing$; если $p<0$, то $a\in](32p^3+27p)/27;\ p[$. Решение. Для того чтобы уравнение $x^3+2px^2+p=a$ имело три действительные корня, функция $f(x)=x^3+2px^2+p-a$ должна иметь локальный максимум и локальный минимум, причем $f(x_{\max})>0$, а $f(x_{\min})<0$. Так как коэффициент при x^3 положительный, то $x_{\max}<x_{\min}$. Найдем экстремумы этой функции $f'(x)=3x^2+4px$. Производная обращается в нуль при $x_1=0$ и $x_2=-4p/3$. Здесь возможны три случая. Если $p>0$, то $x_2<x_1$ и, следовательно, $f(x_2)=\dfrac{32}{27}p^3+p-a>0$, а $f(x_1)=p-a<0$, откуда $p<a<(32p^3+27p)/27$. Если $p=0$, то $x_1=x_2$ и функция экстремумов не имеет: $f'(x)$ всюду, кроме $x=0$, положительна и функция монотонно возрастает. Таким образом, в этом случае нет таких значений a, при которых данное уравнение имело бы три действительных корня. Если $p<0$, то $x_1<0$ и, следовательно, $f(x_1)=p-a>0$, а $f(x_2)=\dfrac{32}{27}p^3+p-a<0$, откуда $(32p^3+27p)/27<a<p$.

70. $y=24\ln 3$ при $x=3$. 71. $y=1+8\ln 5$ при $x=2$. 72. $y=6(1-\ln 3)$ при $x=2$. 73. При $x=0$.

74. $y(1)=-8/3=\min\limits_{[0,\ 2]} f(x)$, $y(2)=8/3=\max\limits_{[0,\ 2]} f(x)$.

75. $\min\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(0)=f(3)=5$, $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(2)=9$.

76. $\min\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[0,\ 3]} f(x)=f(3)=9$.

77. $\min\limits_{[-1;\ 4]} f(x)=f(-1)=-10$, $\max\limits_{[-1;\ 4]} f(x)=f(4)=50$.

78. $\min\limits_{[-3,\ 3]} f(x)=f(1)=23$, $\max\limits_{[-3,\ 3]} f(x)=f(3)=75$.

79. $\min\limits_{[-1;\,5]} f(x)=f(1)=-6,\ \max\limits_{[-1;\,5]} f(x)=f(5)=266.$

80. $\min\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(-1)=-9,\ \max\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(3)=6.$

81. $\min\limits_{[-2;\,2]} f(x)=f(-2)=-24,\ \max\limits_{[-2;\,2]} f(x)=f(2)=4.$

82. $\min\limits_{[-3;\,6]} f(x)=f(3)=-57,\ \max\limits_{[-3;\,6]} f(x)=f(6)=132.$

83. $\min\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(2)=1,\ \max\limits_{[0,\,3]} f(x)=f(0)=f(3)=5.$

84. $\min\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(2)=-25,\ \max\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(3)=0.$

85. $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-1)=f(1)=-16;\ \max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(0)=-9.$

86. $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-1)=1,\ \max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(1)=3.$

87. $\min\limits_{[3/4;\,2]} f(x)=f(1)=1,\ \max\limits_{[3/4;\,2]} f(x)=f(2)=\sqrt[3]{4/3}.$

88. $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x)=f(0)=2/\ln 2,\ \max\limits_{[-1;\,2]} f(x)=f(2)=17/(4\ln 2).$

89. $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(0)=0,\ \max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(1)=24.$

90. $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-1)=f(1)=4;\ \max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(0)=5.$

91. $\min\limits_{[0,\,\pi]} f(x)=f(\pi/2)=0,\ \max\limits_{[0,\,\pi]} f(x)=f(\arcsin(1/4))=$
$=f(\pi-\arcsin(1/4))=9/8.$

92. $\min\limits_{[\pi/3;\,3\pi/2]} f(x)=f(\pi/3)=-1/2,\ \max\limits_{[\pi/3;\,3\pi/2]} f(x)=f(-\pi)=22.$

93. $\min\limits_{[0;\,\pi/2]} f(x)=f(\pi/2)=3\pi/2,\ \max\limits_{[0;\,\pi/2]} f(x)=f\left(\arcsin\left((\sqrt{57}-5)/4\right)\right)=$
$=(15+\sqrt{57})\sqrt{10\sqrt{57}-66}/16+3\arcsin\left((\sqrt{57}-5)/4\right).$

94. $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=f(-2)=-1/(3b^2-8b+16)$ при $b\in]-\infty;\ 2];\ \max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=$
$=f(0)=-1/3b^2$ при $b\in[2;\ +\infty[$.

Решение. Замечаем, что $f(+a)=f(-a)$. Чтобы найти наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 1]$, найдем критические точки. Для этого находим

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-b)}{(2b^2x^2-x^4-3b^2)^2}. \qquad (1)$$

Если $b<0$, то $x^2-b>0$ при любых $x\in R$. Поэтому $f'(x)=0$ только при $x=0$, причем для $x<0$ производная $f'(x)<0$, а для $x>0$ производная $f'(x)>0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция $f(x)$ имеет минимум и наибольшего значения достигает на левом конце (учитываем симметрию и то, что $|-2|>1$). Следовательно, наибольшее значение функции в этом случае будет $f(-2)=-1/(3b^2-8b+16)$. При $b=0$ имеем $f(x)=-1/x^4$, при $x<0$ функция убывает, при $x>0$ — возрастает. Следовательно, в этом случае наибольшее значение функция принимает при $x=-2$, а именно $f(-2)=$ $=-1/(3b^2-8b+16)=-1/16$. При $b>0$ производная имеет три критические точки $x_1=-\sqrt{b}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{b}$. Проверка показывает, что $f'(x)<0$ при $x\in]-\infty;\ -\sqrt{b}[\cup]0;\ \sqrt{b}[$ и $f'(x)>0$ при $x\in]-\sqrt{b};\ 0[\cup]\sqrt{b};\ +\infty[$. Таким образом, при $x=0$ мы имеем локальный максимум $f(0)=-1/3b^2$. Для того чтобы это значение было наибольшим, надо потребовать, чтобы

$$-\frac{1}{3b^2-8b+16}\leqslant-\frac{1}{3b^2}\Rightarrow\frac{1}{3b^2-8b+16}\geqslant\frac{1}{3b^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3b^2-8b+16\leqslant 3b^2\Rightarrow -8b+16\leqslant 0\Rightarrow b\geqslant 2.$$

Итак,

$$\max_{[-2;\,1]} f(x)=f(0)=-1/3b^2 \text{ при } b\in[2;\ +\infty[,$$

$$\max_{[-2;\,1]} f(x)=f(-2)=-1/(3b^2-8b+16) \text{ при } b\in]-\infty;\ 2].$$

95. $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=f(-2)=16-24b+b^2$ при $b\in]-\infty;\ 2/3]$,

$\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=f(0)=b^2$ при $b\in[2/3;\ +\infty[$.

96. $\min\limits_{[-\pi/2;\,3\pi/8]} f(x)=f(-\pi/2)=-1-\sqrt{3}$,

$\min\limits_{[-\pi/2;\,3\pi/8]} f(x)=f(3\pi/8)=((3\pi-4)\sqrt{2}-4\sqrt{3})/4$.

97. $\min\limits_{[-\pi;\,\pi]} f(x)=-2\sqrt{3}/9>-7/18$.

98. $\max\limits_{[-\pi;\,\pi]} f(x)=4\sqrt{3}/9<0{,}77$.

99. $y=-2x$, $y=2x-4$. **100.** $y=-4x+3$. **101.** $y=4x+1$. **102.** $y=4x$, $y=-4x+16$. **103.** $y=-2x+5$. **104.** $y=(3x+10-6\ln 2)/8$. **105.** $y=-(2x-7)/16$. **106.** $y=((25\ln 3)x+28-25\ln 3)/9$. **107.** $y=1$. **108.** $y=4x+2$.

109. $(-(2+\sqrt{3})/2;\ (9-4\sqrt{3})/4)$. **110.** $k=\pm 4$. **111.** $(2;\ 3)$. **112.** $(1;\ 1)$.

113. $(2;\ 4)$; уравнение касательной $y=4x-4$; уравнение секущей $y=4x-3$.

114. На второй кривой $y=\varphi(x)$ в точке $((k+4)/6;\ (k^2-4)/12)$ касательная $y=kx-(k^2+8k+2)/12$ параллельна касательной $y=kx\mp 2((k+1)/3)^{3/2}$ в точках $(\pm\sqrt{(k+1)/3};\ -1\pm((k-2)\sqrt{3(k+1)}/9)$ первой кривой $y=f(x)$ при любом $k\in[-1;\ +\infty[$. Решение. Будем искать уравнение касательной в виде $y-y_1=k(x-x_1)$, где $(x_1;\ y_1)$ — точка на кривой, в которой проведена касательная, угловой коэффициент которой k. Координаты точки касания найдены из уравнений $y_1=f(x_1)$, $f'(x_1)=k$ для первой кривой и из уравнений $y_2=\varphi(x_2)$, $\varphi'(x_2)=k$ для второй кривой. Для кривой $y=f(x)$ имеем $y_1'=f'(x_1)=3x_1^2-1=k$, откуда видим, что $k\geqslant -1$, т. е. если зададимся значением $k\in]-\infty;\ -1[$, то на кривой $y=f(x)$ нет ни одной точки, в которой касательная имела бы такой угловой коэффициент. Для второй кривой $y=\varphi(x)$ имеем $y_2'=\varphi'(x_2)=6x_2-4=k$ и k может принимать любые значения. Итак, будем считать, что $k\in[-1;\ +\infty[$. Тогда для кривой $y=f(x)$ для данного k получим $x_1=\pm\sqrt{(k+1)/3}$, а из уравнения кривой $y_1=-1\pm(k-2)\sqrt{3(k+1)}/9$ и уравнение касательной в точках $(\pm\sqrt{k+1/3};\ -1\pm(k-2)\sqrt{3(k+1)}/9)$ будет $y=kx\mp 2(\sqrt{(k+1)/3})^3$. Для кривой $y=\varphi(x)$ для того же значения k получим $x_2=(k+4)/6$ и $y_2=(k^2-4)/12$ и уравнение касательной в точке $((k+4)/4;\ (k^2-4)/12)$ будет $y=kx-(k^2+8k+2)/12$. Касательные в найденных точках параллельны для любого $k\in[-1;\ +\infty[$.

115. Острый угол между касательными равен $\operatorname{arctg}(1/7)$. **116.** $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{8}$.

117. $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{24}$. **118.** $y=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}x-\dfrac{8+3\sqrt{7}}{8}$, $y=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}x-\dfrac{8-3\sqrt{7}}{8}$.

119. $y=2-5x$. **120.** $(0;\ -1)$, $(4;\ 3)$. **121.** $(k\pi;\ (2k\pi-1+32(-1)^k)/2)$, $k\in\mathbb{Z}$.

122. $0°$. **123.** $5\sqrt{5}$. **124.** $V=2\pi a^3/9\sqrt{3}$. **125.** $\alpha=2\pi(1-\sqrt{2/3})$. **126.** $\alpha=\pi/3$, $S=3l^2\sqrt{3}/16$. **127.** $\dfrac{R^3\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^3(\varphi/2)\operatorname{tg}(\alpha/2)}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

128. $\dfrac{R^2}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{2R^2(1+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

129. $(\pi V\sin^2\alpha\cos\alpha)/2$, $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}=\arccos(1/\sqrt{3})$. **130.** $y=-(3x-5)/9$. **131.** $1/\sqrt{5}$. **132.** $\sqrt{5S/3}$, $\sqrt{4S/15}$. **133.** 21 см и 28 см. **134.** 16/3 и 128/3. **135.** $a=4$ м и $h=2$ м.

136. Тривиальное решение: $\alpha=\operatorname{arctg}(y_0/x_0)$, если точка $(x_0;\ y_0)$ лежит в первом или третьем квадранте и $\alpha=\pi+\operatorname{arctg}(y_0/x_0)$, если точка лежит во втором или четвертом квадранте; длина отрезка при этом равна 0. Нетривиальное решение: $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{y_0/x_0}$, если точка лежит в первом или третьем квадранте, и $\alpha=-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{y_0/x_0}$, если точка лежит во втором или четвертом квадранте. Решение. Для определенности будем считать $x_0>0$, $y_0>0$. Другие случаи разбираются аналогично. Уравнение прямой $y=y_0+k(x-x_0)$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $(0;\ y_0-kx_0)$ и $\left(x_0-\dfrac{y_0}{k};\ 0\right)$. Квадрат длины отрезка, соединяющего эти точки,

$$s^2=\left(x_0-\frac{y_0}{k}\right)^2+(y_0-x_0k)^2=(y_0-x_0k)^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

Очевидно, что s и s^2 достигают минимального значения при одних и тех же условиях. Поэтому находим $(s^2)'$ и приравниваем производную нулю; тогда получаем

$$(s^2)'=-2(y_0-x_0k)\left(x_0+\frac{y_0}{k^3}\right)=0.$$

Следовательно, имеются две критические точки (не считая значений $k=0$ и $k=\infty$,—это случаи горизонтальной и вертикальной прямой, когда $s^2=\infty$): $k=\operatorname{tg}\alpha=y_0/x_0$ и $k=\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt[3]{y_0/x_0}$. Первое значение $\alpha=\operatorname{arctg}(y_0/x_0)$ соответствует тривиальному случаю: $s=0$. Второе значение $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{y_0/x_0}$ соответствует локальному минимуму.

137. $\dfrac{S\sqrt{2S}}{6\sqrt{\sin\alpha}\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

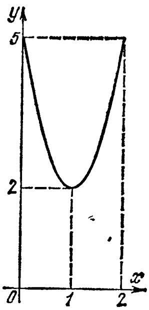
138. $\sqrt{2/3}$. **139.** $2\pi/3$. **140.** Цилиндр, у которого диаметр основания равен высоте. **141.** $\sqrt[3]{4V}$. **142.** $\alpha=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$. **143.** $(4V)^{1/3}/\sqrt[6]{3}$. **144.** Параллелепипед, у которого длина стороны основания равна радиусу описанного шара R, а высота — $R\sqrt{2}$. **145.** $R/3$. **146.** $(2\pi)^{-1/3}$ дм. **147.** $\sqrt{2}R$. **148.** $\sqrt{S(\sqrt{2}-1)/\pi}$. **149.** $8\sqrt{3}\pi R^2/9$. Радиус основания конуса относится к радиусу шара как $2\sqrt{2}:3$. **150.** $l/\sqrt{3}$, $l^3/2$. **151.** 3. **152.** $V=\pi(4R^2-H^2)H/4$, $V_{max}=4\pi R^3/3\sqrt{3}$ при $H=2R/\sqrt{3}$. **153.** $\sqrt{2}$. **154.** В $\sqrt{3}$ раз. **155.** $\pi R^3/\sqrt{2}$. **156.** 3/4. **157.** $3a/2$.

158. $\pi\operatorname{ctg}^2\varphi/\cos 2\varphi$. Наибольшее значение площадь боковой поверхности будет принимать при $\varphi=0{,}5\arccos(\sqrt{2}-1)$, т. е. $\cos 2\varphi=\sqrt{2}-1$. Это значение будет равно $\pi(\sqrt{2}+1)^2$.

159. $4R/3$, $64R^3/81$. **160.** $H/3$, $2R^2H\sqrt{3}/9$. **161.** 2. **162.** 3/2. **163.** $H/3$, $4\pi R^2H/27$. **164.** На середине ребра $[AC]$. **165.** 8. **166.** 4,5 км. **167.** $a=12$ км/ч.

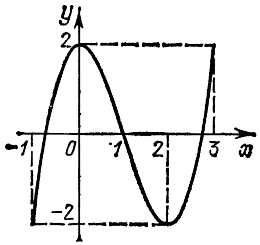
§ 3

1.



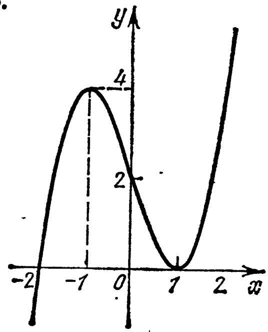
$\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = 2,$
$\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 5.$

2.

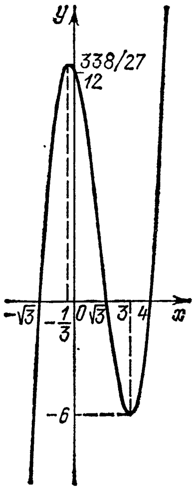


$\min\limits_{[-1;\,3]} f(x) = -2,$
$\max\limits_{[-1;\,3]} f(x) = 2.$

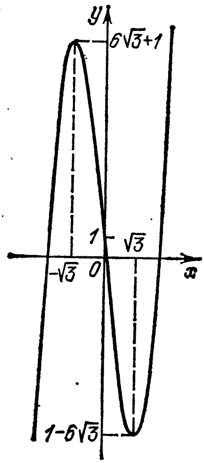
3.



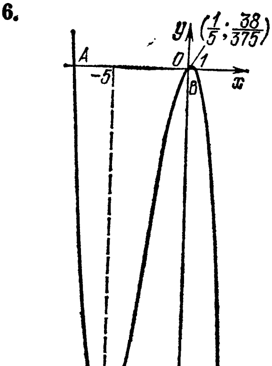
4.



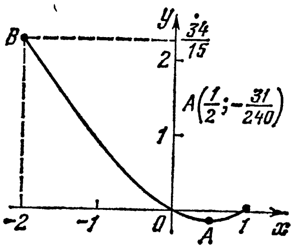
5.



6.

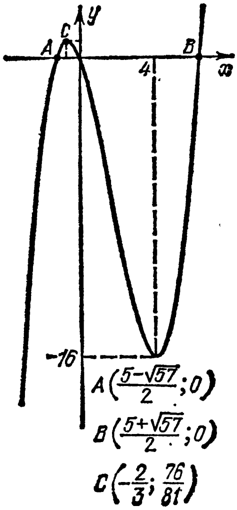


7.

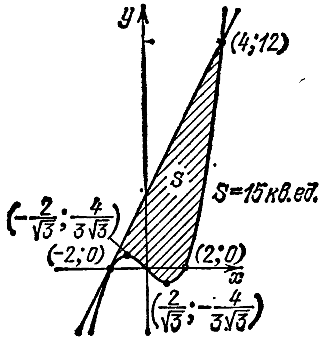


$\min\limits_{[-2,\,1]} f(x) =$
$= -31/240,$
$\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) =$
$= 34/15.$

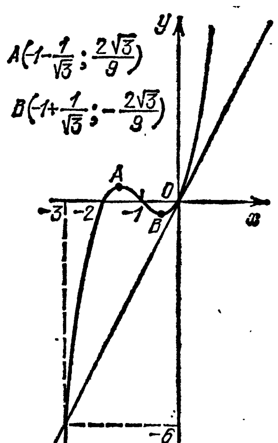
8.



9.

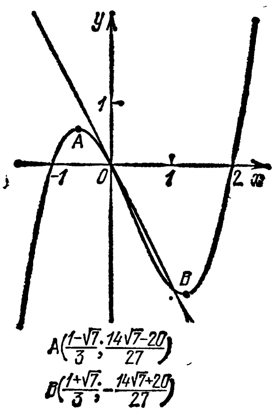


10.



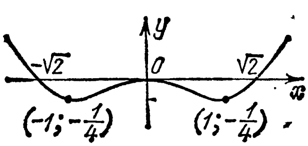
$y=2x$,
(0; 0)
(−3; −6)

11.

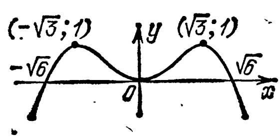


$y=-2x$,
(0; 0)
(1; −2).

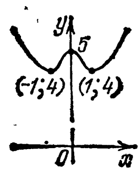
12.



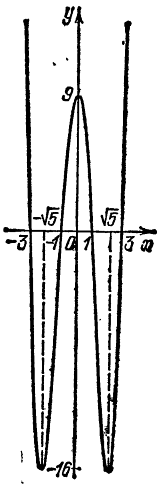
13.



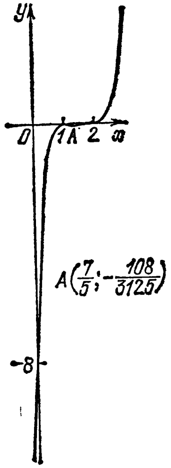
14.



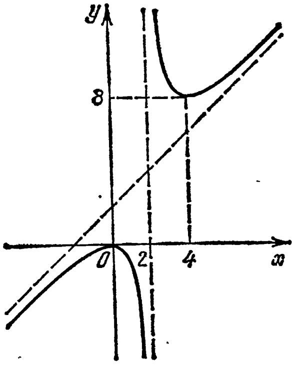
15.



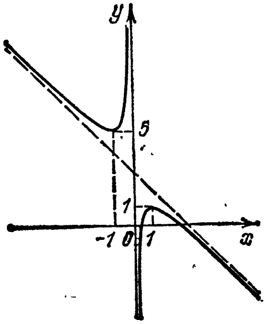
16.



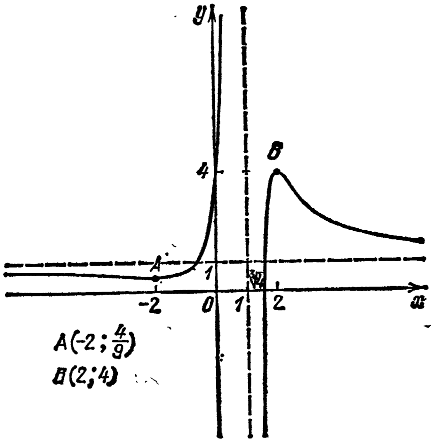
17.



18.

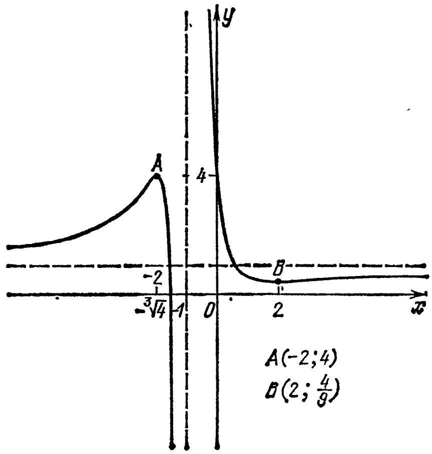


19.



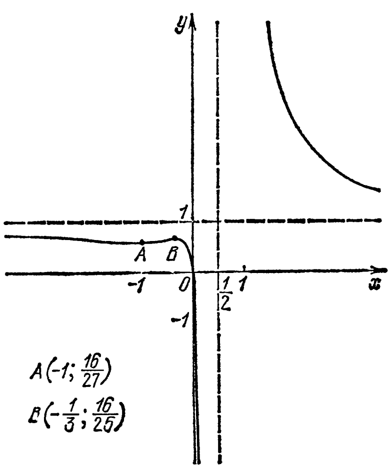
Один корень при $c \in]-\infty; 4/9[\cup]4; +\infty[$; два корня при $c \in \{4/9; 1; 4\}$; три корня при $c \in]4/9; 1[\cup]1; 4[$.

20.



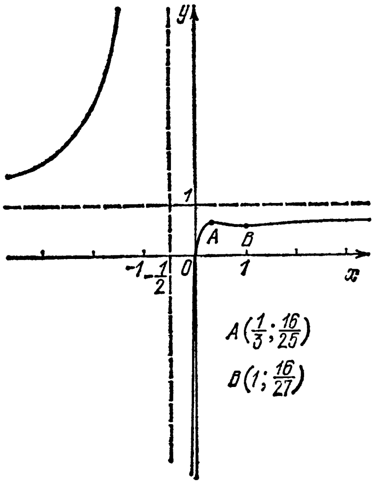
Один корень при $c \in$ $\in]-\infty;\ 4/9[\ \cup\ ]4;\ +\infty[$; два корня при $c \in \{4/9;\ 1,\ 4\}$; три корня при $c \in]4/9;\ 1[\ \cup\ ]1;\ 4[$.

21.



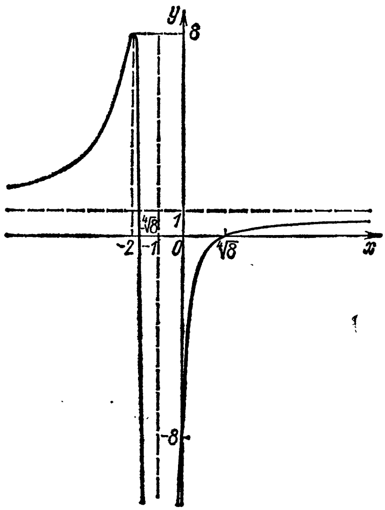
Ни одного корня при $c = 1$; один корень при $c \in]-\infty;\ 16/27[\ \cup$ $\cup\ ]16/25; 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$; два корня при $c \in \{16/27;\ 16/25\}$; три корня при $c \in]16/27;\ 16/25[$.

22.



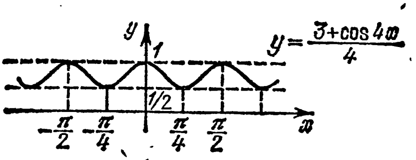
Ни одного корня при $c = 1$; один корень при $c \in]-\infty; 16/27[\cup]16/25; 1[\cup]1; +\infty[$; два корня при $c \in \{16/27; 16/25\}$; три корня при $c \in]16/27; 16/25[$.

23.

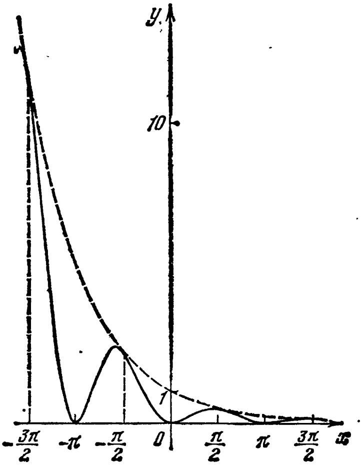


Ни одного корня при $c \in]8; +\infty[$; один корень при $c \in \{1; 8\}$, два корня при $c \in]-\infty; 1[\cup]1; 8[$.

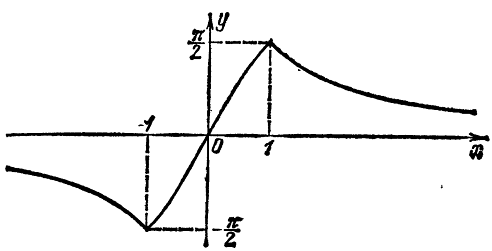
24.



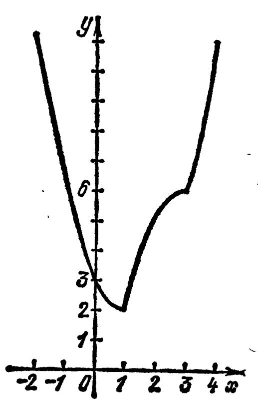
25. $y=(1,3)^{-2x}(1-\cos 2x)/2.$



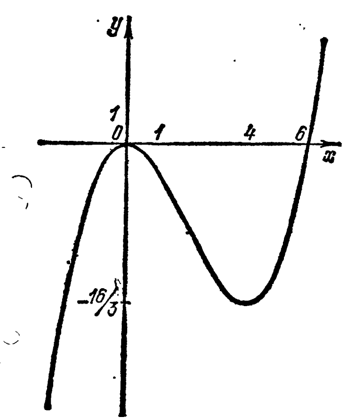
26. $y=2\,\mathrm{arctg}\,x$ при $x\in[-1;\ 1]$; $y=-\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x$ при $x\in\,]-\infty;\ -1]$; $y=\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x$ при $x\in[1;\ +\infty[$.



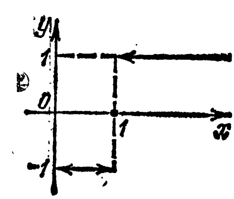
27.



28.



29.



§ 4

1. $F(x)=2x^2+x+1$. 2. $F(x)=x^3-2x^2+1$. 3. $F(x)=\frac{7}{3}x^3-x^2+3x+\frac{2}{3}$.
4. $F(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+1$. 5. $F(x)=-0{,}5\cos 2x+x^3+2{,}5$. 6. $\sqrt{3}-\operatorname{ctg} x$.
7. $6\sin(x/2)-\frac{2}{5}\cos 5x-\frac{14}{5}$. 8. $5\operatorname{tg}(\pi/5)$. 9. $(4-\pi)/8$. 10. $1066/243\ln 3$.
11. $A=1/\ln 2$, $B=7(\ln^2 2-1)/(3\ln^2 2)$. 12. $a>0$. 13. $b=2$. 14. $\alpha=3$. 15. $\alpha>\ln 2$. 16. $a\leqslant-1$. 17. 4/3. 18. 121,5. 19. 32/3. 20. 4/3. 21. 10/3. 22. 9/2. 23. 32/3. 24. 9/2. 25. 81/2. 26. 1/6. 27. 9. 28. 9. 29. 4/3. 30. 1/3. 31. 4,5. 32. 2/3. 33. 7/3. 34. $(8\sqrt{2}-3)/6$. 35. 8/3. 36. 1/3. 37. 9. 38. 5/3. 39. 7/4. 40. $16\sqrt{3}/15$. 41. 88/15. 42. 64/3. 43. 4/3. 44. 2. 45. $(15-16\ln 2)/4$. 46. $(6e-5)/3$. 47. 125/6. 48. 3/2. 49. 4/3. 50. e^2-1. 51. 5. 52. 1/3. 53. $\ln 2$. 54. 8/5. 55. $(6-\pi)/3\pi$. 56. 53/15. 57. $12-5\ln 5$. 58. $4-3\ln 3$. 59. $2{,}5-6\ln(3/2)$. 60. $5\ln(6/5)-0{,}5$. 61. $1{,}5-\ln 2$. 62. $4{,}5+9\ln 3$. 63. $14{,}5+4\ln 2$. 64. $1{,}5-\ln 2$. 65. 18. 66. 7/6. 67. 8/3. 68. 5/12. 69. 8/9. 70. 2. 71. 1/3. 72. $(\pi-2)/4$. 73. $(3\pi-4)/4$. 74. 1. 75. 5π. 76. $5\pi/2$. 77. 3π. 78. 16. 79. $(4-3\ln 3)/2$. 80. $11-6\ln 3$. 81. $90{,}5-6\ln 2$. 82. 16/3. 83. 9/8. 84. 16/3. 85. 128/3. 86. 18. 87. 1/3. 88. 4/3. 89. 61/24. 90. 7/6. 91. $\ln 2-5/8$. 92. $4\ln 3-2$. 93. 1/8. 94. 4/3. 95. $(2e^9-101)/6$. 96. $(\ln 10-\pi+4)/2$. 97. $(4\sqrt{2}-16+\pi\sqrt{2})/16$. 98. 5/6. 99. $2-2\ln 2$. 100. $2\pi+4$. 101. 4/3. 102. $4\pi+8$. 103. 8. 104. 9/8. 105. $S(-1)=125/6$, $\min S(k)=S(2)=32/3$. 106. $S=1$. 107. $x_0=1/2$, $y_0=5/4$. 108. $x_0=3/2$, $y_0=2/3$. 109. $p=-1$. 110. $\alpha_1=\operatorname{arctg}(27/2)$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}(27/4)$. 111. $\alpha_1=\pi+\operatorname{arctg}(4/3\pi)$, $\alpha_2=\pi+\operatorname{arctg}(8/3\pi)$. 112. 625π см^3. 113. $18\sqrt{5}\,\pi$ см^2.

Раздел III

§ 1

1. 33. 2. —33. 3. —8. 4. —10. 5. $\boldsymbol{d}=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}+\frac{3}{5}\boldsymbol{c}$. 6. —4. 7. —2. 8. 40. 9. 2. 10. 7. 11. $\arccos(4/9)$. 12. $\arccos(1/11)$. 13. 13. 14. —6.

16. $\boldsymbol{d}=\{5;\ 12;\ -16\}$, $|\boldsymbol{d}|=5\sqrt{17}$. 17. 90°. 18. $3\pi/4$. 19. —61. 20. Да. 21. $\boldsymbol{a}=\{1;\ 2;\ 2\}$. 22. $\boldsymbol{a}=\{4;\ -2;\ 0\}$. 23. $\{1;\ 1/2;\ -1/2\}$. 24. $\boldsymbol{a}=\{2;\ -6;\ 2\}$. 25. $\boldsymbol{b}_1=\{4\sqrt{2};\ -2;\ 8\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{-4\sqrt{2};\ 2;\ -8\}$. 26. $\boldsymbol{c}=\{-3;\ 3;\ 3\}$.

27. $\boldsymbol{b}=\{8/3;\ -10/3;\ 13/3\}$, 3,66... 28. $\boldsymbol{b}=\{9/16;\ 3/16;\ 21/16\}$. 29. $\cos\alpha=-4/5$. 30. $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. 31. $-22/\sqrt{133}$. 32. $\boldsymbol{x}=\{-4;\ -6;\ 12\}$.

33. $\boldsymbol{x}=\{-24;\ 32;\ 30\}$. 34. $\boldsymbol{x}=\{-3/2;\ 5/2;\ 3\}$.

35. $\{(1\pm\sqrt{2})\sqrt{3}/6;\quad (5\mp 7\sqrt{2})\sqrt{3}/30;\quad (10\pm\sqrt{2})\sqrt{3}/30\}$. В этой записи надо всюду взять или верхние или нижние знаки.

Решение. Пусть искомый вектор есть $\boldsymbol{c}=\{x;\ y;\ z\}$. Тогда $|\boldsymbol{c}|^2=x^2+y^2+z^2=1$; далее, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\cos\pi/4=1/\sqrt{2}\Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}/(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|)=(x+y+2z)/\sqrt{6}=1/\sqrt{2}\Rightarrow x+y+2z=\sqrt{3}$. Так как вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то вектор $\boldsymbol{c}$ можно разложить по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}\Rightarrow x=k-l$, $y=k+3l$, $z=2k+l$. Исключая из последних соотношений k и l, получим $5x+3y-4z=0$. Итак, надо совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 5x+3y-4z=0, \\ x+y+2z=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$x=5z-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y=\frac{5\sqrt{3}}{2}-7z. \tag{1}$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение, получим после преобразований $150z^2-100\sqrt{3}z+49=0$, откуда

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{5\sqrt{6}}=\frac{(10\pm\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}. \tag{2}$$

Подставляя эти два значения для z в соотношения (1), мы получим, соответственно, по два значения для x и y:

$$x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{(1\pm\sqrt{2})\sqrt{3}}{6}, \quad y=\frac{1}{2\sqrt{3}}\mp\frac{7}{5\sqrt{6}}=\frac{(5\mp7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}. \tag{3}$$

Заметим, что в записи соотношений (2) и (3) верхнему знаку у z соответствует верхний знак у x и y, а нижнему — нижний.

36. o. **37.** $\arccos(4/9)$. **38.** $3\sqrt{34}/2$. **39.** $\pi-\arccos(4/9)$, $\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{AB}=\{4;\ -2;\ 4\}$. **40.** $D(-1;\ 1;\ 1)$, $\widehat{(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD})}=2\pi/3$.

41. $\cos\hat{A}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{9+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}}$, $\cos\hat{B}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$,

$$\cos\hat{C}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{18+4\sqrt{6}-4\sqrt{3}}},\quad m=2\sqrt{9+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}.$$

42. $B((2\sqrt{3}-1)/3;\ \ (7-2\sqrt{3})/3;\ \ (7+\sqrt{3})/3)$,
$C(-(3+2\sqrt{3})/9;\ (21+2\sqrt{3})/9;\ \ (21-\sqrt{3})/9)$, или
$B(-(1+2\sqrt{3})/3;\ (7+2\sqrt{3})/3;\ (7-\sqrt{3})/3)$,
$C((2\sqrt{3}-3)/9;\ (21-2\sqrt{3})/9;\ (21+\sqrt{3})/9)$. **43.** $\alpha=1+\lambda$.

44. $(a^2+3b^2-c^2)/4$. Решение. Известно, что $\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})/2$. Поэтому $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}/2=(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA})/2=(b^2+ab\cos\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})})/2$. Для отыскания $\cos\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}$ используем теорему косинусов $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$, откуда $\cos\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}=(a^2+b^2-c^2)/2ab$. Следовательно, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=(b^2+(a^2+b^2-c^2)/2)/2=(a^2+3b^2-c^2)/4$.

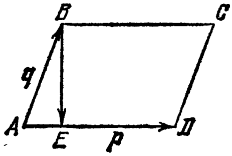
45. Доказательство. Допустим, что сумма векторов, соединяющих центр правильного n-угольника (в частности, треугольника) с его вершинами есть некоторый вектор $\boldsymbol{x}$. Тогда повернем n-угольник вокруг его центра на угол $2\pi/n$; при этом вся фигура, все рассматриваемые на ней векторы, в том числе и вектор $\boldsymbol{x}$, повернутся на угол $2\pi/n$. Пусть $\boldsymbol{x}$ занял положение $\boldsymbol{x}^*$. Но при повороте на угол $2\pi/n$ рассматриваемый n-угольник совместится с первоначальным, и, следовательно, все векторы, идущие от центра к вершинам, в совокупности остались прежними, а значит, и сумма их, т. е. вектор $\boldsymbol{x}$, осталась неизменной, но два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$, повернутые друг по отношению к другу на угол $2\pi/n$, могут совпадать лишь в случае, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{o}$.

46. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}=-(\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CQ})$.

47. $\pi/3$. Решение. Обозначим $\widehat{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}=\alpha$. Тогда $0=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=5\boldsymbol{a}^2+10\boldsymbol{ab}-4\boldsymbol{ab}-8\boldsymbol{b}^2=5+10\cos\alpha-4\cos\alpha-8=6\cos\alpha-3$, откуда $\cos\alpha=1/2$ и $\alpha=\pi/3$.

48. $(a^2+3b^2-c^2)/2$. **49.** $(3a^2+b^2-c^2)/2$.

50. $\pm\left(\boldsymbol{q}-\left(\frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{p}^2}\right)\boldsymbol{p}\right)$. Решение. Для определенности будем считать вектор, совпадающий с высотой, направленным от вершины к стороне $\boldsymbol{p}$. Тогда (см. рисунок) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ (если угол $\widehat{BAD}$ тупой, то точка E лежит вне отрезка $[AD]$). Вектор $\overrightarrow{AE}$ коллинеарен с вектором $\boldsymbol{p}$, следовательно, $\overrightarrow{AE}=k\boldsymbol{p}$ (знак k определит положение точки E), $\overrightarrow{BA}=-\boldsymbol{q}$. Тогда скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AD}$ равно нулю, т. е.

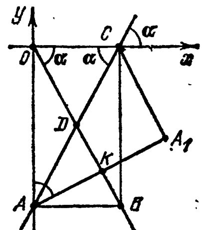


$$0=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=(-\boldsymbol{q}+k\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{pq}+k\boldsymbol{p}^2,$$

откуда $k=(\boldsymbol{pq})/\boldsymbol{p}^2$ и, следовательно, $\overrightarrow{BE}=-\boldsymbol{q}+\left(\frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{p}^2}\right)\boldsymbol{p}$. Если бы мы рассматривали вектор $\overrightarrow{EB}$, знаки были бы противоположные, что и записано выше.

51. $3(a^2+b^2-c^2)/2$. **52.** 0. **53.** $\lambda=-1/5$. **54.** $\overrightarrow{AC}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/3$, $\overrightarrow{BD}=2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. **55.** $\overrightarrow{NP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$. **56.** $\cos\alpha=-1/\sqrt{10}$. **57.** $\boldsymbol{o}$. **59.** c^2. **60.** $\boldsymbol{o}$.

62. $|AC|=1/\cos\alpha$, $|AA_1|=2\sin\alpha$, $|CA_1|=|\cos 2\alpha|/\cos\alpha$. Решение. Из условия задачи следуют две возможности расположения точки A: на положительной или отрицательной полуоси ординат. Для определенности мы остановимся на случае, когда точка A расположена на отрицательной полуоси ординат (см. рисунок). Другое расположение будет симметрично относительно оси Ox, и поэтому длины сторон треугольника ACA_1 в обоих случаях будут одинаковыми. Найдем координаты точек A и $A_1(x;\ y)$. Из треугольника AOC, учитывая, что $|OC|=1$ и $\widehat{OCA}=\alpha$, получаем $|OA|=\operatorname{tg}\alpha$, следовательно, $A(-\operatorname{tg}\alpha;\ 0)$. Длина $|AC|=1/\cos\alpha$. Достраиваем треугольник OAC до прямоугольника. В нем $|AB|=1$, $\widehat{ABO}=\alpha$; тогда $|AK|=\sin\alpha$. Длина $|AA_1|=2\sin\alpha$. Точка A_1 лежит в четвертом квадранте, так как $\alpha>\pi/4$.



$$x=\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OA_1}=\text{пр}_{Ox}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1})=0+|AA_1|\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha,$$

$$y=\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OA_1}=\text{пр}_{Oy}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1})=-\operatorname{tg}\alpha+|AA_1|\cos\alpha=$$
$$=-\operatorname{tg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos 2\alpha.$$

Итак, $A_1(1-\cos 2\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha)$. Отсюда

$$|CA_1|=\sqrt{\cos^2 2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2 2\alpha}=|\cos 2\alpha|/\cos\alpha.$$

63. $1:\sin^2\alpha$. **64.** 29/2. **65.** 20. **66.** $D(2;\ 9)$, $S=14$ или $D(7;\ 0)$, $S=22{,}5$. **67.** 5. **68.** $\lambda=1/4$. **69.** $12b^2$. **70.** $\arccos\sqrt{2/5}$. **71.** 4. **72.** 26. **73.** 30. **74.** $2\sqrt{41}$. **75.** 10. **76.** 5. **77.** -148. **78.** -6. **79.** 3. **80.** $y=x^2-4x+7$.

§ 2

2. Воспользуйтесь тем, что соединив середины последовательных сторон выпуклого четырехугольника, получите параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника.

3. Докажите, что для любого выпуклого четырехугольника можно построить окружность, касающуюся любых трех его сторон или их продолжений. Затем проведите касательную к окружности, параллельную четвертой стороне. Сравните периметры построенного и данного четырехугольников и воспользуйтесь теоремой о касательных к окружности, проведенных из одной точки.

4. Докажите, что перпендикуляр к середине основания трапеции будет в этом случае осью симметрии трапеции.

5. Воспользуйтесь тем, что перпендикуляр к середине основания трапеции в этом случае является осью симметрии для окружности и трапеции.

6. Вычислите длину вписанной окружности, обозначив радиус исходной окружности через R.

7. Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $2R=c$, $2r=a+b-c$, используя теорему о равенстве длин касательных, проведенных к окружности из одной точки.

8. Имеем $|a|=2|b|\sin 10°$. Подставьте в равенство и воспользуйтесь формулой для синуса тройного угла.

9. Воспользуйтесь формулой для вычисления длины медианы через длины сторон треугольника и тем свойством, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 1:2.

10. Используйте тот факт, что радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, и то, что прямая, соединяющая центры касающихся окружностей, проходит через точку касания.

12. Докажите, что сумма площадей указанных треугольников не меняется при переносе точки O параллельно стороне параллелограмма. Отсюда получите, что эта сумма всегда равна половине площади параллелограмма.

13. Поверните $\triangle ABK$ на угол в 90° так, чтобы точка B совместилась с точкой D (поворот вокруг точки A). Покажите, что сторона (BK) пойдет по стороне (CD) и что $\triangle AMK'$ равнобедренный (K' — точка, в которую переходит точка K).

14. Воспользуйтесь формулой для вычисления площади треугольника через радиус вписанной окружности и полупериметр.

15. Докажите, что центр вписанной окружности совпадает с центром данной окружности, а точками касания будут середины отрезков сторон, лежащих внутри данной окружности.

16. Используйте теорему синусов.

17. Докажите, что отрезок, соединяющий середины смежных сторон выпуклого четырехугольника, параллелен соответствующей диагонали, а его длина равна половине ее длины.

18. Пусть: a, b, c — длины сторон треугольника, m_a — медиана к стороне a. Докажите, что $b-0{,}5a < m_a < (b+c)/2$. Напишите такие же неравенства для медиан к другим сторонам.

19. Пусть A, B, C — вершины $\triangle ABC$, O — центр вписанной и описанной окружностей. Покажите, что $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

20. Покажите, что эта прямая является осью симметрии трапеции.

21. Пусть O — точка пересечения боковых сторон трапеции, O_1 и O_2 — середины оснований. Покажите, что точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Используйте то, что $[OO_1]$ и $[OO_2]$ — медианы подобных треугольников.

22. Докажите, что линия центров является осью симметрии для двух окружностей.

23. Используйте указание к предыдущей задаче.

24. Докажите, что сумма этих расстояний равна длине высоты к боковой стороне треугольника.

25. Пусть $\triangle ABC$ — данный правильный треугольник, O — центр симметрии $\triangle ABC$, $|OA| = R$ — радиус описанной окружности, α — угол между (OA) и данной прямой. Докажите, что искомая сумма квадратов равна

$$R^2\left[\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=\frac{3}{2}R^2.$$

26. Соедините центры квадратов с вершинами параллелограмма и рассмотрите образовавшиеся треугольники. Из равенства этих треугольников получите, что стороны рассматриваемого четырехугольника равны и взаимно перпендикулярны.

27. Используйте то, что искомое расстояние равно также $|h-(R+r)|$, где h — высота к основанию. Выразите R и r через h и величину угла при основании и проверьте соответствующее равенство.

28. Пусть R — радиус окружности, описанной около правильного $\triangle ABC$, точка O лежит на окружности (например, между вершинами B и C), $\widehat{OAC} = \alpha$. Тогда, используя теорему синусов, получаем $|OC| = 2R\sin\alpha$, $|OB| = 2R\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ и $|OA| = 2R\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$. Отсюда $|OA| = |OC| + |OB|$.

29. Докажите равенство соответствующих углов трапеций.

30. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($[BC] \parallel [AD]$). Докажите, что $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ равнобедренные.

31. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $|AD| = a$, $|BC| = b$. Через точку C проведите прямую, параллельную диагонали $[BD]$. Пусть D' — точка пересечения этой прямой с (AD). Вычислите длину средней линии $\triangle ACD'$ и отсюда найдите расстояние между центрами диагоналей трапеции.

32. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $[MN]$ — отрезок прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей — точку O. Воспользуйтесь подобием треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle MBO$; $\triangle ACD$ и $\triangle OCN$.

33. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник. Прямое утверждение хорошо известно. Для доказательства обратного утверждения рассмотрим точку $D \in [AC]$ такую, что $|AD| : |AB| = |CD| : |CB|$ и воспользуемся теоремой синусов. Получим

$$\sin\widehat{ABD} = \frac{|AD|}{|AB|}\sin\widehat{ADB},\quad \sin\widehat{CBD} = \frac{|DC|}{|BC|}\sin\widehat{CDB}.$$

Так как $\sin\widehat{ADB}=\sin\widehat{CDB}$, то $\sin\widehat{ABD}=\sin\widehat{CBD}$, а отсюда следует равенство $\widehat{ADB}$ и $\widehat{CDB}$.

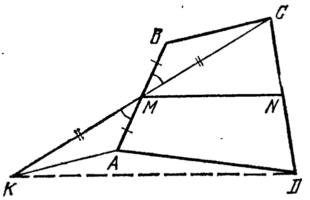
34. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник; m, β, h — медиана, биссектриса и высота, проведенные к стороне $[AC]$; M, N и K — точки пересечения медианы, биссектрисы и высоты с $[AC]$ (или продолжением). Пусть $|AB|\geqslant|AC|$. Докажите, что $\widehat{BAC}\leqslant\widehat{BMC}\leqslant\widehat{BNC}\leqslant\widehat{BKC}=\pi/2$. Отсюда получите требуемое утверждение.

38. Используйте результат задачи **21**.

39. Воспользуйтесь тем, что биссектрисы смежных углов параллелограмма взаимно перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны.

40. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — точка пересечения диагоналей, $|AO|=|OC|$. Докажите, что $\triangle AOD=\triangle COB$.

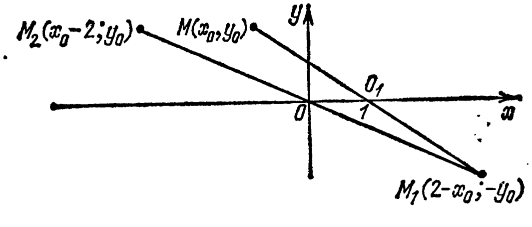
41. Приведем краткое решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, M и N — середины сторон $[AB]$ и $[DC]$ соответственно. Проведем через точки M и C прямую (MC) и отложим на ней отрезок $[MK]$ так, что $|MK|=|MC|$. Соединим точку K с точками A и D (см. рисунок). Тогда $\triangle AMK=\triangle BMC\Rightarrow(KA)\parallel(BC)$ и $|KA|=|BC|$. Но $[MN]$ — средняя линия $\triangle KCD\Rightarrow|MN|=|KD|/2\leqslant(|BC|+|AD|)/2$; знак равенства возможен в том и только в том случае, если точки K, A и D лежат на одной прямой. Но тогда $(BC)\parallel(KA)\parallel(AD)$, т. е. $ABCD$ — трапеция.



42. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $[AN]$ и $[CM]$ — медианы к сторонам $[BC]$ и $[BA]$ соответственно, O — точка пересечения медиан. Докажите, что $\triangle AOM=\triangle CON$.

43. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $[AN]$ и $[CM]$ — высоты к сторонам $[BC]$ и $[BA]$. Докажите, что $\triangle ANC=\triangle CMA$.

44. В качестве иллюстрации проведем решение этой задачи с помощью координатного метода (см. конец § 2). Пусть O и O_1 — центры симметрии фигуры Ф. Проведем через точки O и O_1 прямую, выберем на ней масштаб так,



чтобы $|OO_1|=1$. Ось Oy проведем через точку O перпендикулярно (OO_1) (см. рисунок). Пусть $M\in\Phi$ и имеет в построенной системе координат координаты $(x_0;\ y_0)$. Рассмотрим точку $M_1(2-x_0;\ -y_0)$, симметричную точке M относительно O_1, затем $M_2(x_0-2;\ y_0)$, симметричную M_1 относительно O, затем $M_3(4-x_0;\ -y_0)$, симметричную M_2 относительно O_1, и т. д. Все эти точки M_k принадлежат нашей фигуре Ф. С другой стороны, расстояние $|OM_{2k-1}|=$

$=|OM_{2k}|$ равно $\sqrt{(x_0-2k)^2+y_0^2}$, т. е. неограниченно возрастает с увеличением номера k. Следовательно, фигура Ф не может быть ограниченной.

45. Докажите, что ось симметрии либо пересекает две противоположные стороны выпуклого четырехугольника в их серединах и в этом случае четырехугольник — равнобочная трапеция, либо ось симметрии проходит через две противоположные вершины и делит четырехугольник на два симметричных треугольника.

47. Опишите вокруг треугольника окружность, продолжите биссектрису и серединный перпендикуляр к соответствующей стороне до пересечения с описанной окружностью. Докажите, что они пересекаются в одной точке. Далее воспользуйтесь тем, что высота и соответствующий серединный перпендикуляр параллельны.

48. Пусть $\breve{AD}$ и $\breve{CB}$ — дуги между точками A и D, C и B. Докажите, что сумма длин этих дуг равна πR, т. е. половине длины окружности. Далее соедините точки A, B, C и D с центром O окружности и из $\triangle AOD$ и $\triangle COB$ по теореме косинусов вычислите нужную величину.

49. Докажите, что площадь искомой части треугольника равна половине площади всего треугольника минус площадь одной шестой части круга.

50. Докажите, что $\triangle CAE \sim \triangle CPA$ и что $\widehat{CAE}+\widehat{CEA}=45°$.

52. Докажите, что сумма длин этих отрезков равна удвоенной длине высоты, проведенной к основанию треугольника.

53. Докажите сначала, что диагонали квадрата проходят через центр симметрии ромба. Проведите диагонали и опустите из центра квадрата перпендикуляры на стороны ромба. Воспользуйтесь равенством полученных прямоугольных треугольников.

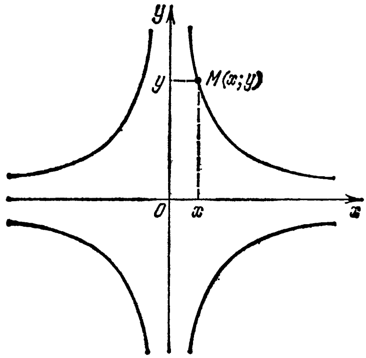
54. Воспользуйтесь результатами задач 27 и 19, предварительно доказав следующее утверждение. Пусть $\triangle ABC$ вписан в окружность радиуса R. Пусть основание $[AC]$ этого треугольника фиксировано, а вершина B перемещается по дуге окружности. Тогда радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности будет наибольшим в том случае, если $\triangle ABC$ равнобедренный.

55. Приведем решение, основанное на вычислении максимума функции. Пусть в $\triangle ABC$ величина угла C фиксирована: $\hat{C}=\alpha$, а углы A и B меняются. Положим $\hat{A}=x$; тогда $\hat{B}=\pi-\alpha-x$. Рассмотрим функцию $f(x)=$ $=\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}=\cos x+\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha-x)$. Исследуя эту функцию на максимум-минимум при $x\in]0, \pi[$, получаем, что максимум достигается при $x=(\pi-\alpha)/2$, т. е. в том случае, если $\triangle ABC$ равнобедренный ($\hat{A}=\hat{B}$). Пусть теперь $\triangle ABC$ равнобедренный, $\hat{A}=\hat{B}=x$. Тогда $\hat{C}=\pi-2x$. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}=2\cos x+\cos(\pi-2x)$. Исследуя эту функцию на максимум при $x\in]0, \pi/2[$, мы получим, что $f(x)$ достигает максимума при $x=\pi/3$, т. е. в случае равностороннего треугольника. Таким образом, сумма косинусов углов треугольника достигает наибольшего значения для равностороннего треугольника и равна в этом случае 3/2.

56. Для доказательства первого и третьего соотношений используйте формулу для вычисления площади треугольника $S=\frac{ab}{2}\sin\alpha$, где α — величина угла между сторонами треугольника. Для доказательства второго соотношения постройте равновеликий данному четырехугольник с теми же длинами сторон, но такой, чтобы стороны длины a и c, b и d были смежными.

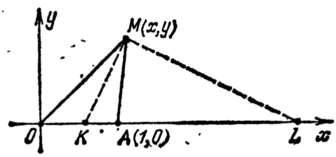
57. Проведите через точку M диаметр (CD) и докажите, что $|AM|\cdot|MB|=|CM|\cdot|MD|$.

58. Решение. Выберем систему прямоугольных координат, взяв в качестве начала этой системы точку пересечения данных прямых, а сами эти прямые в качестве координатных осей, выбрав на них положительные направ-



ления и указав единицы масштаба (см. рисунок). Тогда расстояние от любой точки M с координатами $(x;\ y)$ до данных прямых будет равно $|x|$ и $|y|$ соответственно. Следовательно, точка $M\,(x;\ y)$ принадлежит искомому геометрическому месту точек в том и только в том случае, если $|x|+|y|=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}$. Тогда $O\,(0;\ 0)$ не может принадлежать искомому множеству, поэтому $|x|+|y|\neq 0$, и, следовательно, написанное уравнение равносильно уравнению $|x||y|=1$. Графиком данного уравнения будет объединение графиков функций $y=1/x$ и $y=-1/x$, т. е. две гиперболы. Таким образом, мы построили искомое множество точек.

59. Решение. Воспользуемся вновь координатным методом. Пусть данные точки O и A. Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy, начало которой совпадает с точкой O, ось Ox содержит отрезок $[OA]$. Можно считать, что точка A имеет координаты $(1;\ 0)$ (см. рисунок). Воспользовавшись формулой для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости с заданными координатами, мы получим $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|AM|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, где $M\,(x;\ y)$—любая точка плоскости. Таким образом, точка $M\,(x;\ y)$ принадлежит искомому геометрическому месту точек в том и только в том случае, если $\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m:n$, т. е.



$$n^2\,(x^2+y^2)=m^2\,[(x-1)^2+y^2].$$

Преобразуем полученное соотношение

$$(n^2-m^2)\,x^2+2m^2x+(n^2-m^2)\,y^2=m^2.$$

Если $n=m$, то мы получаем $x=1/2$, т. е. искомое геометрическое место точек будет прямой, проходящей через середину отрезка $[OA]$ перпендикулярно этому отрезку. Таким образом, при $m=n$ мы получаем теорему о серединном перпендикуляре! Пусть теперь $n \neq m$, можно считать $m > n > 0$. Выполним дальнейшие преобразования:

$$x^2-2\frac{m^2}{m^2-n^2}x+y^2=-\frac{m^2}{m^2-n^2},$$
$$\left(x-\frac{m^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\frac{m^4}{(m^2-n^2)^2}-\frac{m^2}{m^2-n^2},$$
$$\left(x-\frac{m^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{mn}{m^2-n^2}\right)^2.$$

Последнее уравнение определяет окружность с центром в точке $N\,(m^2/(m^2-n^2);\,0)$ радиуса $mn/(m^2-n^2)$. Таким образом, мы показали, что искомое геометрическое место точек при $m=n$ (т. е. при равенстве расстояний от искомой точки до двух данных) есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках, а при $m \neq n$ это некоторая окружность с центром на прямой, проходящей через данные точки. Укажем на тесную связь построенного множества точек M с внутренней и внешней биссектрисами $\triangle OMA$ (см. рисунок). Пусть $K \in [OA]$ и $L \notin [OA]$—точки пересечения данной окружности с прямой (OA). Тогда $[MK]$—биссектриса внутреннего $\widehat{OMK}$ треугольника OMA, так как прямая (MK) делит сторону $[OA]$ на части, пропорциональные сторонам $[OM]$ и $[AM]$ (см. задачу **33** этого параграфа). Так как прямая (ML) перпендикулярна биссектрисе (MK), то (ML)—биссектриса внешнего угла при вершине M треугольника OMA (см. задачу **51** этого параграфа).

60. Искомые множества точек описываются уравнениями

1) $|x||y|=||x|-|y||$, 2) $\left|\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|y|}\right|=||x|-|y||$.

Постройте соответствующие множества на плоскости.

61. Парабола с осью симметрии, проходящей через данную точку F, перпендикулярно данной прямой l. Вершина параболы расположена на оси симметрии на равном расстоянии от данной прямой и данной точки. Ветви параболы удаляются от данной прямой. Если ось параболы принять за ось Oy, причем за положительное направление принять направление от l к F, вершину—за начало координат O, прямую, проходящую через вершину перпендикулярно Oy—за ось Ox, расстояние от данной точки до данной прямой обозначить p, то уравнение параболы примет вид $x^2=2py$.

62. Обозначим середину отрезка $[AB]$ через O, а заданную постоянную через a^2. Тогда искомым геометрическим местом являются две прямые, перпендикулярные прямой (AB) и отстоящие от точки O на расстоянии $a^2/2|AB|$.

63. Воспользуйтесь результатом задачи **24** этого параграфа.

64. Пусть A—точка, лежащая на стороне угла и удаленная от другой стороны на данное расстояние. Проведите через A прямую, параллельную биссектрисе. Тогда часть прямой, лежащая внутри угла, удовлетворяет условиям задачи. Рассмотрите все возможные случаи.

65. Прямые, проходящие через точку пересечения прямых (AB) и (CD), расстояние от точек которых до (AB) и (CD) обратно отношению $|AB|:|CD|$ (исключая саму точку пересечения этих прямых).

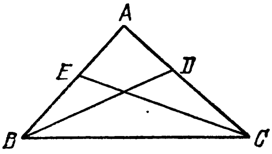
66. Окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром окружности, как на диаметре.

67. Часть окружности с центром в вершине данного прямого угла и радиуса $a/2$.

68. Окружность, концентричная данной и радиуса $R=r/\sin(\alpha/2)$, где r — радиус данной окружности.

§ 4

1. 50 см. **2.** $\pi/6$. **3.** 12 см, 16 см. **4.** 9,5 см. **5.** $\dfrac{a\cos(\alpha/2)}{\sin((\pi+3\alpha)/4)}$.
6. $2\sqrt{S\operatorname{tg}(\alpha/2)}$. **7.** 14 см. **8.** $ab\sqrt{2}/(a+b)$. **9.** 85.



10. $7(\sqrt{7}-1)/9\sqrt{2}$. Решение. Обозначим длины сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ через c, a, b. Тогда по условию $a/R=2$, $b/R=3/2$, т. е. $a=2R$, $b=3R/2$. С другой стороны, $a=2R\sin\hat{A}$, следовательно, $\sin\hat{A}=1$, т. е. угол $\hat{A}$ прямой. В прямоугольном треугольнике ABC найдем третью сторону $|AB|=c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4R^2-9R^2/4}=R\sqrt{7}/2$. Биссектрисы (см. рисунок)

$$\beta_b=|BD|=\sqrt{|AB|^2+|AD|^2},\quad \beta_c=|CE|=\sqrt{|AC|^2+|AE|^2},$$

$$|AD|=|AC|\cdot\frac{|AB|}{|AB|+|BC|}=\frac{bc}{a+c},\quad |AE|=|AB|\cdot\frac{|AC|}{|AC|+|BC|}=\frac{bc}{a+b}.$$

Тогда

$$|AD|=\frac{3R\cdot R\sqrt{7}}{2\cdot2(2R+R\sqrt{7}/2)}=\frac{3R\sqrt{7}}{2(4+\sqrt{7})},\quad |AE|=\frac{3R\cdot R\sqrt{7}}{2\cdot2\cdot(2R+3R/2)}=\frac{3R\sqrt{7}}{14},$$

$$\beta_b=\sqrt{\frac{7R^2}{4}+\frac{9\cdot7\cdot R^2}{4(4+\sqrt{7})^2}}=\sqrt{\frac{7R^2(16+8\sqrt{7}+7+9)}{4(4+\sqrt{7})^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{7R^2(32+8\sqrt{7})}{4(4+\sqrt{7})^2}}=\frac{\sqrt{7}R}{2}\sqrt{\frac{8(4+\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})^2}}=\frac{\sqrt{7}R\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}R\cdot2}{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}=\frac{2R\sqrt{7}}{\sqrt{7+2\sqrt{7}+1}}=\frac{2R\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1},$$

$$\beta_c=\sqrt{\frac{9R^2}{4}+\frac{9\cdot7R^2}{4\cdot7^2}}=\frac{3R}{2}\sqrt{1+\frac{1}{7}}=\frac{3R\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}=\frac{3R\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

Искомое отношение

$$\frac{\beta_b}{\beta_c}=\frac{2R\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{(\sqrt{7}+1)\,3R\cdot\sqrt{2}}=\frac{14R(\sqrt{7}-1)}{(7-1)\,3R\sqrt{2}}=\frac{7(\sqrt{7}-1)}{9\sqrt{2}}.$$

11. $\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)/4$. **12.** $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. **13.** $\arccos(13/14)$. **14.** 25. **15.** $2\operatorname{arctg}(1/3)$. **16.** $\arccos(1/\sqrt{10})$. **17.** 15 см, 5 см. **18.** $3\sqrt{3}$ см^2. **19.** $(9\sqrt{3}/4)$ см^2. **20.** 14 см, 8 см.

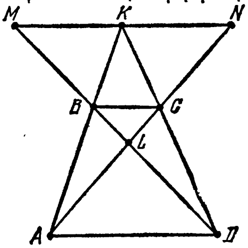
21. 1. Решение. Пусть стороны параллелограмма a и b, меньшая диагональ d_1, а бо́льшая d_2. Тогда $2a^2+2b^2=d_1^2+d_2^2$, но по условию $d_2^2=3d_1^2$, поэтому $a^2+b^2=2d_1^2$. По теореме косинусов $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ=2d_1^2-ab$, т. е. $ab=d_1^2$. Следовательно, $a^2+b^2+2ab=2d_1^2+2d_1^2=4d_1^2$, или $(a+b)^2=4d_1^2$, т. е. $a+b=2d_1$. Получили систему

$$\begin{cases} a+b=2d_1, \\ ab=d_1^2, \end{cases}$$

ее решение $a=b=d_1$, т. е. $a/b=1$.

22. 96 см^2. 23. $|a-b|/2$. 24. $l^2 \sin\alpha\cos\alpha$. 25. $0{,}5 \arcsin(4/5)$, $\pi - 0{,}5\arcsin(4/5)$.

26. $2ab/|a-b|$. Решение. Пусть $|AD|>|BC|$ (см. рисунок); для определенности будем считать $AD=a$, $BC=b$. Тогда $\frac{|LC|}{|AL|}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{|LC|}{|AL|+|LC|}=$ $=\frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{|LC|}{|AC|}=\frac{b}{a+b}$; $\frac{|KC|}{|KD|}=\frac{b}{a} \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{|KC|}{|KD|-|KC|}=\frac{b}{a-b} \Rightarrow \frac{|KC|}{|CD|}=\frac{b}{a-b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|KC|}{|CD|}=\frac{|NC|}{|AC|}=\frac{b}{a-b}$. Перемножая пропорции $\frac{|AC|}{|LC|}=\frac{a+b}{b}$ и $\frac{|NC|}{|AC|}=\frac{b}{a-b}$, получим

$$\frac{|NC|}{|LC|}=\frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{|LC|+|NC|}{|LC|}=\frac{2a}{a-b} \Rightarrow \frac{|LN|}{|LC|}=\frac{2a}{a-b},$$

но $\frac{|LN|}{|LC|}=\frac{|MN|}{|BC|}=\frac{2a}{a-b}$, откуда $|MN|=\frac{2ab}{a-b}$. Если бы было $a<b$, то при выводе их роли поменялись и мы получили бы $|MN|=2ab/(b-a)$.

27. $\operatorname{arctg}(2/3)$. 28. $\sqrt{5/2}$ см. 29. $\pi/6$ и $\pi/3$. 30. $\sqrt{7}$ м. 31. $\sqrt{m^2+n^2}/2$. 32. $21\sqrt{13}$ см. 33. $\sqrt{91}$ м. 34. $1/\sqrt{13}$. 35. 2 и 6. 36. $R^2\cos(\alpha/2)(1+\sin(\alpha/2))$. 37. $\operatorname{tg}(\varphi/2)\sin 2\varphi$. 38. 4 см; 12,5 см. 39. $(\sqrt{15}+\sqrt{35})$ см. 40. $(3-\sqrt{7})/2$. 41. $b/(2\cos(\alpha/2))$. 42. $r/8$. 43. $2\pi R/3$. 44. $2\sqrt{Rr}$, $2R\sqrt{r/(r+R)}$, $2r\sqrt{R/(r+R)}$. 45. $Rr/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$, $Rr/(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2$ $(R>r)$. 46. $r(r+R)/R$, $r+R$. 47. $r_1r_2/2(r_1+r_2)$. 48. $\sqrt{3}$. 49. В 2 раза. 50. $2R^2(1-\sin(\alpha/2))^2/\sin\alpha$. 51. $2Rr+r^2$. 52. 15/8. 53. $\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=(a+b+c)/2$. 54. $2(3+2\sqrt{3})$. 55. $9r^2/2$. 56. $(S/\sin\alpha)^{1/2}$. 57. $2R^2\sin^3\alpha$. 58. $100\pi/9$ см^2. 59. a. 60. $3\sqrt{3}r^2$. 61. $\sqrt{24-6\sqrt{3}}/2$. 62. $2a/\sqrt{5}$. 63. 9 см, 12 см, 15 см. 64. 240 см^2. 65. 20π см. 66. $0{,}5\arccos(3-8S)$ $(1/4<S<3/8)$.

67. Пусть $0<\beta<\alpha\leqslant\pi$; $H/(2\sin((\alpha-\beta)/4)\sin((\alpha+\beta)/4))$ и $H^2\operatorname{ctg}((\alpha-\beta)/4)$, если основания трапеции расположены по одну сторону от центра окружности, $H/(2\cos((\alpha-\beta)/4)\cos((\alpha+\beta)/4))$ и $H^2\operatorname{tg}((\alpha+\beta)/4)$, если основания трапеции расположены с разных сторон от центра окружности.

68. 1 см и 17 см. 69. $\frac{1}{8}b\frac{\sin\alpha(5-4\cos\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. 70. $k\frac{\sin\beta(5-2\sqrt{6}\cos\alpha)}{6\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$.

71. 2 см, 14 см. 72. 4 см. Решение. Так как $\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{13}$, то $\frac{b+5}{5+a}=\frac{7}{13}$, т. е. $7a-13b=30$. С другой стороны, $a+b=10$. Следовательно, $a=8$, $b=2$. Боковая сторона $l=\frac{a+b}{2}=5$. Поэтому высота $H^2=l^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=25-9=16$, т. е. $H=4$ см.

73. $3\sqrt{3}$. **74.** $|BB_1|=\sqrt{53}/2$, $\hat{B}=\arccos(11\sqrt{6}/30)$. **75.** $S=216$ см^2. **76.** $20\sqrt{3}$ см^2. **77.** $|AB|=2\sqrt{46}/3$. **78.** $\sqrt{10}$ см. **79.** $\sqrt{65}/2$. **80.** $P=4ab/(a+b)$. **81.** $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}/7$, где α — наименьший угол треугольника. **82.** 6 м, 6/5 м^2. **83.** $\sin\alpha=(1+\sqrt{73})/12$, где α — угол при основании треугольника. **84.** 18 см, 24 см, 30 см. **85.** $\sqrt{b^2+c^2\pm 6bc/5}$. **86.** $\arccos(4/5)$ или $\pi-\arccos(4/5)$. **87.** $|EF|=9\sqrt{2/7}$ см. **88.** 6π см. **89.** $40\sqrt{2}/11$ см. **90.** 9 см. **91.** $16\sqrt{7}/11$ см^2. **92.** 20 см, 5 см. **93.** 45/2 см^2. **94.** $8/\sqrt{3}$ см. **95.** $|CA|=39$ см, $|CB|=26$ см. **96.** Боковые стороны $2R(2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$, основание $2R(2+\sqrt{3})$. **97.** $|OK|=5/14$ см. **98.** $8\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **99.** R_1-r, R_2-r, $r(R_1-r)(R_2-r)/(R_1R_2-r^2)$. **100.** $1:4(3-2\sqrt{2})$. **101.** $2(\sqrt{2}-1)$ см. **102.** $a/2$, $a/2$. **103.** 32 см^2. **104.** 4 см. **105.** $8/\sqrt{3}$ см^2. **106.** $a/2$, $h/2$. **107.** $h=H/2$, где h и H — высоты параллелограмма и треугольника соответственно. **108.** $2a$. **109.** $3R/2$.

110. $(a-b)^3/16(a+b)$, $a>b$. **111.** Квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, $S_{\max}=2R^2$. **112.** Квадрат со стороной 3 дм. **113.** 12 см и $3\sqrt{3}$ см. **114.** 12 см и 9 см. **115.** 9 см и 12 см. **116.** 9 см и 7,5 см. **117.** В круг радиуса $7\sqrt{2}$ см. **118.** $c/\sqrt{2}$ и $c/\sqrt{2}$.

§ 5

1. 7. Указание. Рассмотрите случаи, когда по разные стороны плоскости лежат по две вершины и одна и три вершины.

2. Если прямые не проходят через одну точку, то покажите, что они лежат в плоскости, проходящей через три точки их пересечений.

3. Рассмотрите тетраэдр $ABCD$ и покажите, что вершина D проектируется в точку пересечения высот $\triangle ABC$. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.

4. Через $[AB]$ проведите плоскость, параллельную $[CD]$. Через точку A в этой плоскости проведите прямую, параллельную $[CD]$, и отложите на ней отрезок $[AD']$, равный $[CD]$. Рассмотрите $\triangle D'DB$, покажите, что $|MN|$ равна длине медианы $\triangle D'DB$ и отсюда получите требуемое неравенство.

5. Пусть l — наклонная, l_1, l_2 и l_3 — три данные прямые. Докажите, что наклонная l перпендикулярна биссектрисам углов между прямыми l_1 и l_2 и прямыми l_1 и l_3. Отсюда следует, что l перпендикулярна плоскости, в которой лежат l_1, l_2 и l_3.

6. Достройте треугольную пирамиду до треугольной призмы с основаниями, лежащими в данных плоскостях. Докажите, что объем призмы не будет меняться при параллельном перемещении отрезков, а объем данной треугольной пирамиды равен трети объема построенной призмы.

8. Рассмотрите сечение четырехгранного угла плоскостями, перпендикулярными линии пересечения плоскостей, проходящих через его противоположные ребра.

9. Нет. Указание. Рассмотрите трехгранный угол, у которого два плоских угла прямые, а третий не более $\pi/3$.

10. Докажите, что если α — величина плоского угла при вершине данного трехгранного угла, то величина не прилежащего к нему двугранного угла больше α.

11. 0, 1, 3 и 6.

16. Приведем решение, основанное на теореме о связи площади основания и боковых граней. Пусть величина всех двугранных углов пирамиды равна α; S_1, S_2, S_3, S_4—площади граней. Получаем

$$\begin{cases} S_1=\cos\alpha\,(S_2+S_3+S_4), \\ S_2=\cos\alpha\,(S_1+S_3+S_4), \\ S_3=\cos\alpha\,(S_1+S_2+S_4), \\ S_4=\cos\alpha\,(S_1+S_2+S_3). \end{cases}$$

Отсюда $S_1=S_2=S_3=S_4$ и $\cos\alpha=1/3$. Кроме того, в этом случае высоты пирамиды проектируются в центры вписанных в грани пирамиды окружностей. Отсюда легко получить, что апофемы боковых граней равны (если одна из граней принята за основание). Но тогда и длины стороны основания равны. Повторяя эти рассуждения для каждой грани, получим равенство всех ребер пирамиды.

17. Приведем решение. Обозначим цифрами 1, 2, 3 и 4 вершины пирамиды; a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}—длины ребер, соединяющих соответствующие вершины; R_1, R_2, R_3 и R_4—радиусы шаров с центрами в соответствующих вершинах. Тогда решение задачи сводится к вопросу о разрешимости системы

$$\begin{cases} R_1+R_2=a_{12}, \\ R_1+R_3=a_{13}, \\ R_1+R_4=a_{14}, \\ R_2+R_3=a_{23}, \\ R_2+R_4=a_{24}, \\ R_3+R_4=a_{34} \end{cases}$$

при условии $a_{12}+a_{34}=a_{13}+a_{24}=a_{14}+a_{23}=d$, d—данная величина. Тогда выписанная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} R_1+R_2=a_{12}, \\ R_1+R_3=a_{13}, \\ R_1+R_4=a_{14}, \\ R_1+R_2+R_3+R_4=d. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$R_1=(a_{12}+a_{13}+a_{14}-d)/2>0,$$
$$R_2=(a_{12}+d-a_{13}-a_{14})/2>0,$$
$$R_3=(a_{13}+d-a_{12}-a_{14})/2>0,$$
$$R_4=(a_{14}+d-a_{12}-a_{13})/2>0,$$

т. е. мы доказали, что такие шары существуют и указали их радиусы (то, что $R_i>0$ при $i=1, 2, 3, 4$, докажите, используя соотношения между длинами сторон треугольника).

18. Проведите плоскость через высоту пирамиды и боковое ребро и рассмотрите линию пересечения этой плоскости с основанием пирамиды.

19. Нет. Постройте соответствующий пример.

20. Докажите, что эта величина равна $3H$, где H—высота пирамиды. Для этого из точки P опустите перпендикуляры на стороны основания и докажите, что сумма их длин постоянна и равна длине h высоты основания, а искомая величина равна $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α—величина двугранного угла при основании пирамиды.

21. Треугольник, квадрат, шестиугольник.

24. Существует. Например, рассмотрите многогранник, который получится, если поставить друг на друга два равных наклонных параллелепипеда так, чтобы совместились их основания.

26. Пусть M — данная точка, l_1 и l_2 — касательные к шару, K и M — точки касания l_1 и l_2 с шаром. Проведите плоскость через точки M, K и N и воспользуйтесь теоремой о касательных к окружности.

29. Пусть O — центр описанного вокруг пирамиды шара. Рассмотрите четыре пирамиды, вершины которых совпадают с точкой O, а основаниями являются грани исходного тетраэдра. Докажите, что они равны между собой. Отсюда будет следовать, что точка O равноудалена от плоскостей граней, т. е. является и центром вписанного в тетраэдр шара.

32. Пусть H_k — длина высоты пирамиды, проведенная к грани площади S_k, вневписанный шар радиуса R_k касается этой грани. Докажите, что $\frac{1}{R_k} = \frac{1}{r} - \frac{2}{H_k}$. Далее воспользуйтесь равенством $H_k S_k = r(S_1+S_2+S_3+S_4) = 3V$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{2S_1}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right)+\frac{1}{r}\left(1-\frac{2S_2}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\left(1-\frac{2S_3}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right)+\frac{1}{r}\left(1-\frac{2S_4}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right)=\frac{2}{r}.$$

33. Для доказательства достаточности покажите, что центр описанной сферы будет совпадать с точкой пересечения перпендикуляра к основанию, восставленного из центра описанного вокруг основания круга, и плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему вершину пирамиды с любой вершиной основания, проведенной через его середину.

34. Пусть M, N и K — точки касания сферы с гранями трехгранного угла. Рассмотрите пирамиду $SMNK$. Докажите, что $|SM|=|SN|=|SK|$. Отсюда следует, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Используя это, покажите, что продолжение высоты пройдет через точку O, т. е. центр данной сферы.

36. Воспользуйтесь теоремой о равенстве длин касательных, проведенных к данной сфере из одной точки (см. задачу 26).

39. Докажите, что указанный угол по величине равен двугранному углу, образованному плоскостями α и β.

40. Пусть точки M, N, K и L — середины сторон $[SB]$, $[SC]$, $[AC]$ и $[AB]$ соответственно, точка O — середина $[SA]$. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — прямоугольник, а $\triangle SAC$ и $\triangle SAB$ — равносторонние. Далее докажите, что точка O одинаково удалена от точек M, N, K, L, S и A. Отсюда получите, что O — центр данной сферы.

41. Рассмотрите сечения данного шара плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середины боковых ребер пирамиды. Так как круг, полученный в сечении шара основанием пирамиды, касается сторон основания в их серединах, то докажите, что в основании пирамиды лежит равносторонний треугольник. Рассмотрите прямую, проходящую через центры полученных в сечениях кругов, и докажите, что она перпендикулярна основанию. Далее покажите, что длины боковых ребер пирамиды равны между собой.

46. Пусть 2α — величина угла при основании осевого сечения данного конуса, l — длина образующей этого усеченного конуса. Тогда $R_1 = r\operatorname{ctg}\alpha$,

$R_2 = r \operatorname{tg} \alpha$, $l = R_1 + R_2$, где r — радиус вписанного шара, R_1 и R_2 — радиусы оснований данного конуса. Воспользовавшись формулой для площади боковой поверхности усеченного конуса, получаем

$$S_{\text{бок. усеч. кон.}} = 2\pi (R_1 + R_2) l/2 = \pi r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Далее, так как $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geqslant 2$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, то $S_{\text{бок. усеч. кон.}} \geqslant 4\pi r^2 = S$, где S — площадь поверхности вписанного шара.

§ 6

1. $2\pi/3$. Указание. Через точку $C \in L_1$ проведите прямую $L_2' \parallel L_2$, а через точку $B \in L_2$ — прямую $L_2'' \parallel (CD)$. Пусть B' — точка пересечения L_2' и L_2''. Рассмотрите треугольник $B'CA$.

2. $\sqrt{m^2 - 4l^2 \sin^2 (\alpha/2)}$ либо $\sqrt{m^2 - 4l^2 \cos^2 (\alpha/2)}$ в зависимости от взаимного расположения точек A и B на прямых L_1 и L_2.

3. 29,6. Указание. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.

4. 1) $(d + b \cos (\pi/5))/(1 + \cos (\pi/5))$, если точки A, B и C лежат по одну сторону от плоскости γ;

2) $|d - b \cos (\pi/5)|/(1 + \cos (\pi/5))$, если точки A и B лежат по одну сторону от γ, а точка C — по другую сторону; 3) $b \cos (\pi/5)/(1 + \cos (\pi/5))$, если A и B лежат по разные стороны от γ.

5. 1) $|c - b|$, если B и C лежат по одну сторону от плоскости β; 2) $b + c$, если B и C лежат по разные стороны от плоскости β.

6. На три равные части длины $\sqrt{3}/3$ каждая. **7.** $3a^2/2$.

8. $\operatorname{arcctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$. **9.** $\arcsin \operatorname{tg} (\alpha/2)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. **10.** $2\sqrt{2} b^2 \times$ $\times \sin 2\beta \sin ((2\alpha + \pi)/4)$. **11.** $b^3/\sqrt{2}$. **12.** $|BD_1| = 5\sqrt{3}$ см. **13.** $2l \sin \alpha \sqrt{2S + l^2 \cos^2 \alpha}$.

14. $V = h^3 (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta)/2$, $S = 2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$. **15.** $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

16. $l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \operatorname{tg} (\alpha/2)/2$. **17.** $S^{3/2} \sin \alpha \sqrt{\sqrt{3} \cos \alpha}/3$. **18.** $Q^{3/2} \sin \varphi \sqrt{\sqrt{3} \cos \varphi}$.
19. $a^3 (\sin \alpha \sin \beta \cos^2 \beta)/2$. **20.** $a^3 (\sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta)/2$. **21.** $l^3 (\sin 2\alpha \operatorname{tg}^2 \beta)/4$. **22.** $c^3/32$.
23. $\sqrt{3} (V \operatorname{ctg} \alpha)^{2/3} \sec \alpha$. **24.** $4 + 6\sqrt{3}$. **25.** $4p^2 \sin 2\alpha/(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$.
26. $l^3 (\sin 2\alpha \cos \alpha)/4$. **27.** $7b^2/(8 \cos \alpha)$, $2 \operatorname{arctg} (\cos \alpha)$. **28.** $a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}/\sin \alpha$.
29. $6\sqrt{21}$ см. **30.** $d^3 (\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} (\beta/2))/2$. **31.** $a^3 (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha/2))/8$. **32.** $3d^3 (\sin 2\alpha \sin \alpha)/16$.

33. $a^2 b \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}/2$. Задача имеет решение, если $\sin \alpha > \cos \beta$.
34. $\sqrt{2S \cos \alpha/\sqrt{3}}/\cos (\alpha/2)$.

35. $a^3 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 (\alpha/2) - 1}/24$ $(\alpha < 2\pi/3)$.

36. $\operatorname{arctg} \left((1 \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha})/2 \operatorname{tg} \alpha\right)$. Задача имеет решение при $\operatorname{tg}^2 \alpha \leqslant 1/8$.
37. $125\sqrt{3}/9$ см^3.

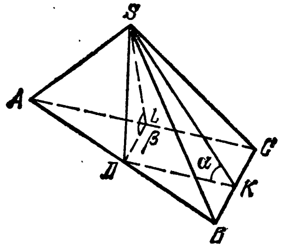
38. $l^3 (\sin 2\alpha \cos \alpha) \sqrt{3}/8$. **39.** $d^3/(3 \sin (\alpha/2) (3 - 4 \sin^2 (\alpha/2)))$.
40. $a^2 \sqrt{3}/(27 \cos \alpha)$. **41.** $32\sqrt{133}/27$ см^2. **42.** $b^3 (\cos^3 \beta \operatorname{tg} \alpha)/(6 \sin \beta)$.
43. $(12 + 13\sqrt{3})/2$ см^2. **44.** $c^3 (\sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta)/3$. **45.** $25 (2 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{2 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha})/8$.

46. $S \operatorname{ctg} \beta \sqrt{2S \sin \alpha}/(6 \sin \alpha \cos (\alpha/2))$. **47.** $a^2 (1 + \cos \beta)/(4 \cos \beta \operatorname{tg} (\alpha/2))$.

48. $2R^3 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \operatorname{tg} \varphi$. **49.** $a^3 \cos (\alpha/2)/\left(12\sqrt{4 \sin^2 (\alpha/2) - 1}\right)$.
50. $\sqrt{3} l^3 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-3/2}$. **51.** $6r^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \operatorname{cosec} \alpha$. **52.** $a^3/24$.
53. $2 \cdot 3^{-1/6} \sqrt[3]{V}$. **54.** $H^3 \sqrt{3}/8$. **55.** $\sqrt{3}\, \dfrac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} (3V \operatorname{ctg} \alpha)^{2/3}$. **56.** $(a^3 \operatorname{tg} \varphi)/12$,

$a^2\sqrt{3(1+4\,\mathrm{tg}^2\varphi)}/4$. **57.** $4d^3/(9\sqrt{3}\sin\alpha\sin 2\alpha)$. **58.** $3aH/16$. **59.** $2a^2\sqrt{15}/49$. **60.** $1/7$. **61.** $\sqrt{3}a^2/(48\cos\alpha)$, $(a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha)/48$. **62.** $H^2\sin\alpha/(4\cos\alpha-2)$. **63.** $R^3\sin^3\alpha\sqrt{3\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)-1}/3$. **64.** $3\pi a^2/(1+2\cos 2\alpha)$. **65.** $b^3\sin(\alpha/2)\times\times\sqrt{1+2\cos\alpha}/6$ $(0<\alpha<2\pi/3)$. **66.** $a^3(\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta)/6$. **67.** $\sqrt{3}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha/(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^3$. **68.** $b^3/6$. **69.** $\pi/2$. **70.** $84\sqrt{2}$ см².

71. $h^3(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta)^{3/2}/(12\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$. Решение. Так как все ребра равны, то равны и их проекции на основание; следовательно, вершина S (см. рисунок) проектируется в центр D описанной вокруг треугольника ABC окружности. Треугольник прямоугольный, поэтому точка D—середина гипо-



тенузы. Пусть $[SK]\perp[BC]$ и $[SL]\perp[AC]$, $\widehat{SKD}=\alpha$, $\widehat{SLD}=\beta$, $|DK|=|AC|/2$, $|DL|=|BC|/2$. Тогда $H=|SD|=\dfrac{|AC|\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}=\dfrac{|BC|\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}$; положим $|AC|=k\,\mathrm{tg}\,\beta$ и $|BC|=k\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где k некоторый коэффициент, который позднее будет найден. Тогда $H=(k\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)/2$. Искомый объем $V=\dfrac{H}{3}\dfrac{|AC||BC|}{2}=$ $=\dfrac{k^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}{12}$. Площадь треугольника $S=(|AB|h)/2=|AC|\cdot|BC|/2$. Из этого соотношения найдем k. Действительно, $|AB|=\sqrt{|AC|^2+|BC|^2}=$ $=k\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}$, поэтому $kh\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}=k^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$, откуда $k=$ $=h\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}/\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. Тогда объем пирамиды

$$V=\frac{h^3(\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta})^3}{\mathrm{tg}^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\beta}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}{12}=\frac{h^3(\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta})^3}{12\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

72. $\dfrac{r^2}{6\sin^2(\varphi/2)}\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{\pi-\varphi}{4}\right)\sqrt{a^2\sin^2\varphi-r^2\,\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{\pi-\varphi}{4}\right)}$.

73. $\dfrac{2R^3\,\mathrm{tg}\,\beta\sin^2\alpha\cos^3(\alpha/2)}{3(1+\sin(\alpha/2))}=\dfrac{2}{3}R^3\,\mathrm{tg}\,\beta\sin^2\alpha\cos^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

74. $b^3(\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta)/6$. **75.** $r\sqrt{1+\cos^4(\alpha/2)\,\mathrm{tg}^2\beta}$.

76. $m^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}/24$ $(\pi/6\leqslant\alpha)$.

77. Обозначим $\alpha=\arcsin(2S(\sqrt{2}-1)/l^2)$. Тогда, если $\pi/4<\alpha\leqslant\pi/3$, то искомые углы $\alpha-(\pi/4)$, α, $\alpha+(\pi/4)$; если $\pi/3<\alpha<\pi/2$, то искомые углы $\alpha-(\pi/4)$, α, $\alpha+(\pi/4)$ или $(3\pi/4)-\alpha$, $\pi-\alpha$, $(5\pi/4)-\alpha$.

78. $a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin(\alpha/2))$. Решение. Пусть $|AB|=|CD|=a$, $\widehat{ADB}=$ $=\widehat{ACB}=\widehat{DAC}=\widehat{DBC}=\alpha$ (см. рисунок). Через $[DC]$ проведем плоскость, перпендикулярную стороне $[AB]$, она пересечет эту сторону в точке K такой, что $|AK|=|KB|$. Тогда объем пирамиды равен $\dfrac{1}{3}|AB|S_{CDK}$. Из прямоугольного треугольника ADK находим $|DK|=|AK|\cdot\operatorname{ctg}(\alpha/2)=a/(2\operatorname{tg}(\alpha/2))$. Из прямоугольного треугольника DKM находим

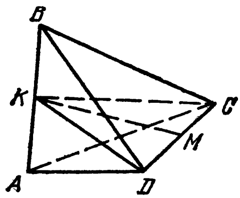
$$|KM|^2=|KD|^2-|DM|^2=\frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}-\frac{a^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2(\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2))}{4\sin^2(\alpha/2)}=\frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2(\alpha/2)}\Rightarrow|KM|=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}\quad(0<\alpha<\pi/2).$$

Тогда

$$S_{CDK}=\frac{1}{2}|DC|\cdot|KM|=\frac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin(\alpha/2)},$$

и искомый объем пирамиды равен $a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin(\alpha/2))$ $(0<\alpha<\pi/2)$.



79. $[3a^4-16(P^2-Q^2)]:[3a^4+16(P^2-Q^2)]$.

80. 1) $2\sqrt[4]{\left|\frac{p+1}{p-1}\right||S^2-T^2|}$ при $p\neq 1$;

2) при $p=1$ длина гипотенузы может принимать любое значение из интервала $]0,\ 2\sqrt{2S}[$ (при этом $S=T$).

81. $\dfrac{abc}{ab+bc+ac+\sqrt{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}}$.

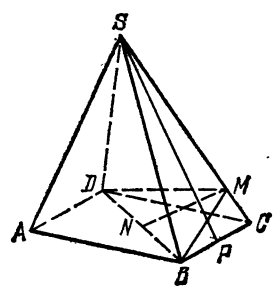
82. $\frac{1}{3}\sqrt{S_0}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{S_0}{S}\right)^2}\sqrt[4]{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}$, где $S=S_1+$ $+S_2+S_3$.

83. $5\sqrt{3}/6$. **84.** 7. **85.** 32 см^3. **86.** $(a^3\operatorname{tg}\alpha)/6$. **87.** $\arccos\left(\sqrt{2}\sin(\varphi/2)\right)$.

88. $2\arccos\left(1/\sqrt{1-\cos\alpha}\right)$ $(\alpha>\pi/2)$. Решение. Проведем $[BM]$ и $[DM]$ (см. рисунок), перпендикулярные ребру $[SC]$. Тогда $\widehat{BMD}=\alpha$. Искомый угол $\widehat{BSC}=\beta$. Обозначим $|BC|=a$, $|SB|=$ $=l$; тогда $|BN|=a\sqrt{2}/2$. Вычислим $\sin(\beta/2)$:

$$\sin(\beta/2)=\frac{|PB|}{|SB|}=\frac{a}{2l}=\frac{|BM|}{l}\,\frac{|BN|}{|BM|}\,\frac{a}{2|BN|}=$$

$$=\sin\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Итак,

$$\sin(\beta/2)=\sqrt{2}\cdot\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)\sin(\alpha/2),$$

откуда

$$\cos(\beta/2)=1/\left(\sqrt{2}\sin(\alpha/2)\right)=1/\sqrt{1-\cos\alpha}\qquad(\alpha>\pi/2)$$

или

$$\beta=2\arccos\left(1/\sqrt{1-\cos\alpha}\right)\qquad(\alpha>\pi/2).$$

89. $l^3(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)/3(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}$.

90. $H\cos\varphi/(1+\cos\varphi)\equiv H\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}(\varphi/2)$.

91. $a^2\sqrt{3}/6$.

92. $-4h^3\cos^2\alpha\cos 2\alpha/3$ $(\pi/4\leqslant\alpha<\pi/2)$. При $0<\alpha<\pi/4$ указанная плоскость не пересекает пирамиду.

93. $a^2\sin^2\alpha\cos(\alpha/2)/\sin^2(3\alpha/2)$.

94. $\sqrt{2}/12$. Указание. Докажите, что точка M совпадает с центром основания пирамиды, а точка N — с центром круга, описанного около грани BSC.

95. 26 м². 96. $a^3(\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta)/3$, $a^2\sin\alpha(1+\sin\beta)/\cos\beta$. 97. $a^3(\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta)/6$. 98. $2R^3(\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\sin^3 2\beta)/3$. 99. $4r^3\operatorname{ctg}^3(\alpha/2)\sqrt{-\cos 2\alpha}/(3\cos\alpha)\equiv 4r^3\operatorname{ctg}^3(\alpha/2)\times\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}/3$ $(\pi/4<\alpha<\pi/2)$.

100. $2H^2\dfrac{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\sqrt{2\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 101. $6(7-4\sqrt{3})\,m^2\operatorname{tg}\alpha$.

102. $4\sqrt{3}m^2\cos\alpha\cos^2(\alpha/2)$. 103. $10\sqrt{19}$ см². 104. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2/4$.

105. $\sqrt{(S\cos\alpha)/2(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}$. 106. $m^3(\sin^2\alpha\cos\alpha)/6\sin^6(\alpha/2)$.

107. $0{,}5\cdot h^2\operatorname{tg}\alpha/\cos\alpha$. 108. $2\arcsin((\sqrt{10}-\sqrt{2})/4)$. 109. $12(2+\sqrt{3})$ см².

110. $2a^2\sin\beta\sin^2(\gamma/2)/\cos\gamma$. 111. $d\operatorname{ctg}(\alpha/2)\sin^2(\beta/2)/\cos\beta$. 112. $384\sqrt{10}/169$ см².

113. $a(1+\cos^2\alpha)/2\sin 2\alpha$.

114. $(a/6)\sqrt{(\sqrt{3}-\operatorname{tg}(\alpha/2))/(\sqrt{3}+\operatorname{tg}(\alpha/2))}$. 115. $H(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1)/4\operatorname{tg}\alpha$.

116. $(\pi a^3\operatorname{tg}\alpha)/9\sqrt{3}$. 117. $l\cos^2\alpha\sqrt{3+\cos^2 2\alpha}/2\sin\alpha$. 118. $2\pi a^3(3+\cos^2\alpha)/3\sin^2\alpha$.

119. $2v(\cos(\alpha/2)\sin\alpha)/\pi$. 120. $\operatorname{arcctg} 2$. 121. $\pi a^3\operatorname{ctg}\beta/(24\sin^3(\alpha/2))$, $\pi a^2(1+\sin\beta)/(4\sin\beta\sin^2(\alpha/2))$. 122. $3S/2$.

123. $\pi a^3(\cos(\beta/2)\operatorname{tg}\alpha)/(24\sin^3(\beta/2))$,

$\pi a^2\sqrt{1+\cos^2(\beta/2)\operatorname{tg}^2\alpha}/(4\sin^2(\beta/2))$.

124. $R^2\sqrt{3}/(4\cos\alpha)$. 125. $15\pi(5+2\sqrt{3})/\sqrt{37+10\sqrt{3}}$.

126. $\sqrt{(2S/\sin 2\alpha)^3}/(8\cos^3\alpha)$.

127. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1/3}$. Решение. Пусть $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, а ASD — осевое сесение конуса. Величину угла между осью конуса и его образующей обозначим α, $0<\alpha<\pi/2$. Длину радиуса общего основания конуса и цилиндра обозначим r. Площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S_ц=2\pi r^2+2\pi r\cdot r\operatorname{ctg}\alpha=2\pi r^2(1+\operatorname{ctg}\alpha),$$

а площадь полной поверхности конуса

$$S_к=\pi r^2+\pi r\cdot r/\sin\alpha=\pi r^2(1+\sin\alpha)/\sin\alpha.$$

По условию задачи $S_ц:S_к=7:4$, т. е.

$$\frac{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{7}{4}.$$

Так как $1+\sin\alpha\neq 0$ при $0<\alpha<\pi/2$, то умножением на $1+\sin\alpha$ данное уравнение приводится к уравнению $\sin\alpha+8\cos\alpha=7$. Далее, учитывая, что $\sin\alpha=2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, $\cos\alpha=\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)$, $1=\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)$, приведем данное уравнение к виду

$$15\sin^2(\alpha/2)-2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)-\cos^2(\alpha/2)=0,$$

Деля это уравнение почленно на $\cos^2(\alpha/2)\neq 0$, получим

$$15\operatorname{tg}^2(\alpha/2)-2\operatorname{tg}(\alpha/2)-1=0,$$

которое имеет два корня $\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/3$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)=-1/5$. Так как по условию задачи $\alpha>0$, то второе решение надо отбросить. Итак, $\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha=2\operatorname{arctg}(1/3)$.

128. $8Q\operatorname{tg}\varphi\cos^6(\varphi/2)\sqrt{Q/\pi}$. **129.** $\operatorname{arctg}\left((2\pm\sqrt{2})/4\right)$. **130.** $2\pi R^2\sin\alpha\times$ $\times\sin(\alpha/2)$. **131.** $\operatorname{arctg}\left(4/(4-\sqrt{6})\right)$. **132.** $\pi R^2\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)(1+\cos\alpha)/\cos\alpha$, $\pi R^3\times$ $\times(\operatorname{ctg}^3(\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha)/3$. **133.** $24\pi R^2\sin^4\alpha/(2+\operatorname{tg}\alpha)^2$. **134.** $-\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha/8\cos^6\alpha$. **135.** 10 см. **136.** $\pi aS/\sin\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$. **137.** $\pi S/\sin(\pi m/(m+n))$ $(m\leqslant n)$. **138.** $h\left(\sqrt{1+(n/m)}-1\right)^{1/2}$. **139.** $\operatorname{arctg}(\sin(\beta/2)\operatorname{ctg}\varphi)$.

140. $\arcsin\left|\dfrac{2\sin^2(\beta/2)-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\right|$. Указание. Через точку B проведите в плоскости α прямую, параллельную прямой (OA), и вычислите угол между этой прямой и плоскостью основания другого конуса.

141. $7\pi l^3(\sin(\alpha/2)\sin\alpha)/54$. **142.** 4 см. **143.** $2R\sqrt{1+2\cos\alpha}/\sqrt{3}$. **144.** $r(\sqrt{6}-2)/2$, $r(\sqrt{6}+2)/2$. **145.** $a(2-\sqrt{3})$, $a(2+\sqrt{3})$.

146. $2\arccos\left((1+\sqrt{17})/8\right)$. **147.** $0{,}5a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}(\alpha/2)/\sin^2(\alpha/4)}$.

148. $\dfrac{\pi R^3}{3}\left[\cos^4\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}-\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

149. $\pi a^3((1+\cos\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha)/3$. **150.** $Q((1+\sin\alpha)/\sin\alpha)^3\operatorname{tg}^2\alpha$.

151. $2\arcsin\left((3+\sqrt{3})/6\right)$ или $2\arcsin\left((3-\sqrt{3})/6\right)$. **152.** $\arccos\left(1/\sqrt[3]{2}\right)$.

153. Отношение площади поверхности шара к площади поверхности куба равно $\pi/6$, отношение их объемов равно $\pi/6$.

154. $\dfrac{1}{4}Q\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi-\alpha}{4}\right)\dfrac{1+\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\equiv\dfrac{Q(1+\sin(\alpha/2))^3}{2\cos(\alpha/2)\sin\alpha}$.

155. $\sin^2\alpha(1+\operatorname{cosec}(\alpha/2))/4$. **156.** $5r/\sqrt{3}$.

157. $\pi r^2\left(\sqrt{r^2+(d+r)^2}+r\right)^3/3(d+r)^2$,
$\pi r^2\left(\sqrt{r^2+(d-r)^2}+r\right)^3/3(d-r)^2$.

158. $4/3\sin\alpha\cos(\alpha/2)$. **159.** $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{3/2}\operatorname{tg}\alpha$.

160. $\dfrac{\pi}{4}r^3\dfrac{m}{n\sin\alpha}\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{2m}{n\cos\alpha}}\right)$ (параметры m, n и α должны удовлетворять условию $n\cos\alpha\geqslant 2m$).

161. $3\pi(l^2\sin^2 2\beta)/4$, $\pi(l^3\sin^3 2\beta)/12$.

162. $S^{3/2}\sin 2\alpha\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}/(3\pi^{3/2})$.

163. $S\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)/(\pi\cos\alpha)$. **164.** $\pi a^3\sqrt{6}/1728$. **165.** $2h(2r-h)$.

166. $\dfrac{4a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}(1+\cos\alpha)^2\equiv 4a^2\cos\alpha\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)$, $\dfrac{4}{3}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha(1+\cos\alpha)^3$.

167. $a^2/\cos^4(\alpha/2)$. **168.** $ab\operatorname{tg}\alpha\sqrt{a^2+b^2}/12$. **169.** $\pi R^2H/12$.

170. $r^3(1+\operatorname{tg}\varphi)[1+\operatorname{ctg}((\pi-4\varphi)/4)]/6$. **171.** $\pi l^2\cos\alpha/(1+3\cos^2\alpha)$.

172. $32r^3\sqrt{\cos\alpha}/(3\sin(\alpha/2))$.

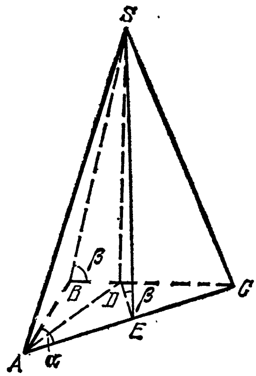
173. $\dfrac{\pi a^3}{4}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos^3\beta}{\sqrt{\cos^3(\alpha+\beta)\cos^3(\alpha-\beta)}}\equiv\dfrac{\pi a^3}{4}\dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sqrt{(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)^3}}$.

174. $\pi d^3(\cos^2(\alpha/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta)/8$. **175.** 29/36 или 1.

176. $1/2\sqrt{2}$. Указание. Докажите, что сфера касается всех ребер тетраэдра в их серединах, а ее центр совпадает с центром описанной около тетраэдра сферы.

177. $\sqrt{5}/3$. 178. $a(3\sqrt{2}+4)/4$. 179. При $\varphi=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$ объем конуса $2\pi l^3/9\sqrt{3}$. 180. $R\sqrt{2/3}$.

181. $Q\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{2Q\operatorname{ctg}\alpha}/3$, $\alpha=\pi/3$. Решение. Пусть в данной пирамиде $\widehat{ABC}=\pi/2$, $SBC\perp ABC$, $\widehat{BAC}=\alpha$, двугранные углы при сторонах $[AB]$ и $[AC]$ равны β, соответствующие линейные углы на рисунке $\widehat{SBC}=\widehat{SED}=\beta$, причем $[SD]$ — высота пирамиды, $[SE]\perp[AC]$, $[DE]\perp[AC]$, $[SB]\perp[AB]$. Заметим, что $|BD|=|SD|\operatorname{ctg}\beta=|DE|$, $|SB|=|SD|/\sin\beta=|SE|$. Легко показать, что $|AB|=|AE|$ и $\widehat{BAD}=\widehat{DAE}=\alpha/2$. Так как $|BC|=|AB|\operatorname{tg}\alpha$, то площадь треугольника ABC



$$Q=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}|AB|^2\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$|AB|=\sqrt{2Q\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Следовательно, высота пирамиды $|SD|=|BD|\operatorname{tg}\beta=|AB|\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{2Q\operatorname{ctg}\alpha}$. Тогда объем пирамиды равен

$$V=Q\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{2Q\operatorname{ctg}\alpha}/3,$$

где по смыслу задачи на углы α и β накладываются ограничения: $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$. Найдем наибольшее значение функции $V(\alpha)$; для этого достаточно найти наибольшее значение функции

$$f(\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha/2)\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha},\quad 0<\alpha<\pi/2.$$

Тогда

$$f'(\alpha)=\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{2\cos^2(\alpha/2)}-\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}{4\cos^2(\alpha/2)\sin^2\alpha\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}.$$

На интервале $]0,\pi/2[$ производная $f'(\alpha)=0$ тогда и только тогда, когда $\cos\alpha=1/2$, т. е. при $\alpha=\pi/3$. Если $\alpha\in]0,\pi/3[$, то $f'(\alpha)>0$, если $\alpha\in]\pi/3,\pi/2[$, то $f'(\alpha)<0$. Следовательно, при $\alpha=\pi/3$ функция $f(\alpha)$, а следовательно, и $V(\alpha)$ принимает наибольшее значение.

182. 2. 183. $R/\sqrt{3}$. 184. Высота цилиндра должна равняться радиусу круга основания и равняться $\sqrt[3]{v/\pi}$.

185. $4v\operatorname{tg}^3(\alpha/2)/\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha=\arccos(1/3)$.

186. Длина радиуса основания конуса равна $3r/2$, $9\pi r^2h/4$.

187. 1) $(3a^2h)/4\sqrt{a^2+3h^2}$ при $h>a/\sqrt{6}$;

2) $(a/2)\sqrt{h^2+(a^2/12)}$ при $0<h\leqslant a/\sqrt{6}$.

188. $b^3(\operatorname{tg}\alpha\sin 2\varphi\cos\varphi)/24$. Наибольшее значение объем пирамиды принимает при $\varphi=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$.

189. 1) $2rR^3/(R^2-r^2)$ при $r<R\leqslant(1+\sqrt{2})r$;

2) $R^2((R^2+r^2)/(R^2-r^2))^2/2$ при $R>(1+\sqrt{2})r$.

190. 1) $(H^2\operatorname{ctg}\beta)/\sqrt{2}$ при $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)\leqslant\beta<\pi/2$;

2) $H^2(1+\sin^2\beta)/(4\sin^2\beta)$ при $0<\beta<\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$.

191. $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. 192. $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. 193. $\frac{4\pi a^3}{3}\frac{\cos^4(\alpha/2)}{\cos^2\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$. 194. $\pi a^3\sin^2\alpha\times$ $\times\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\beta$. 195. $\pi a^3(\sin 2\alpha\sec^2 2\alpha)/6$.

196. $\pi[16S^2+6Sh^2\operatorname{ctg}^2\alpha+h^4\operatorname{ctg}^4\alpha]/24h$.

197. $\sqrt{6v\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}\operatorname{tg}(\beta/2)/2,\ \beta=\arccos(1/3)$.

198. $\pi R^3/(3\cos^2(\alpha/2)\sin(\alpha/2)),\ \alpha=2\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$.

Раздел IV

§ 2

2. Да. 5. Указание. Воспользуйтесь тем, что $n^4+4=(n^2+2n+2)\times$ $\times(n^2-2n+2)$.

3. Да, если одно из них — число 2.

4. Решение. Так как любое нечетное число можно представить в виде $2m+1$, где $m\in\mathbf{Z}$, то справедливость утверждения следует из равенства $2m+1=(m+1)^2-m^2$.

5. 1692. 6. а) $\sin 3>\cos 3$; б) $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$ (так как $(\sqrt[3]{3})^6=9$, $(\sqrt{2})^6=8$). 7. $A>B$.

8. Указание. Так как $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$, то для доказательства утверждения достаточно доказать, что $\sqrt{6}$ — число иррациональное.

9. Указание. Сравните площадь круга единичного радиуса с площадью правильного вписанного 12-угольника и площадью описанного квадрата.

10. -1 при $x<1$; 1 при $x>1$. 11. $2/(1-a)$.

12. $a^{511/512}$. 13. $n(n+1)/2$ при $x=1$; $(x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2})/(1-x)^2$ при $x\neq 1$. Решение. При $x=1$ заданная сумма равна $1+2+3+\ldots$ $\ldots+n=n(n+1)/2$. При $x\neq 1$ сумма

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=$$
$$=x(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1})=x(x+x^2+x^3+\ldots+x^n)'=$$
$$=x\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)'=x\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

14. Решение. Так как $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$, $k\in\mathbf{Z}$, то

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

15. Решение. Так как при любых $k\neq 0$ имеет место равенство $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, то

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

16. Указание. Докажите методом математической индукции.

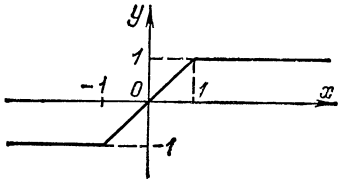
17. $3\cdot 3\cdot P_3=54$. 18. 3970. 19. $C_9^5=126$.

20. $n(n-3)/2$. Указание. Число отрезков, соединяющих вершины выпуклого n-угольника, равно C_n^2, из них диагоналей C_n^2-n (остальные отрезки — стороны многоугольника). Задачу можно решить и другими способами. Например. Каждая вершина соединена диагоналями с $n-3$ вершинами. Так как вершин n, то получаем $n(n-3)$; но при этом каждая диагональ считалась дважды (диагональ соединяет две вершины многоугольника и мы ее считали выходящей как из первой вершины, так и из второй). Поэтому различных диагоналей будет $n(n-3)/2$.

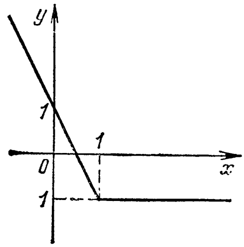
21. Не более, чем $C_{m+n+k}^3-C_m^3-C_n^3-C_k^3$.

22. $n=32$. Решение. Этот коэффициент равен $C_n^2\cdot\frac{1}{16}=31$, т. е. $\frac{n(n-1)}{32}=31$, $n(n-1)=31\cdot 32 \Rightarrow n=32$.

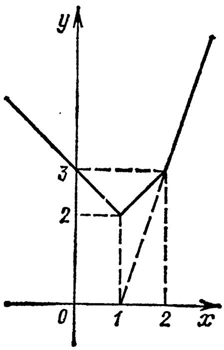
23.



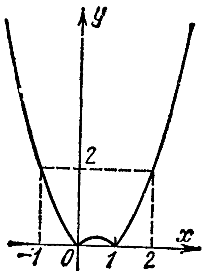
24.



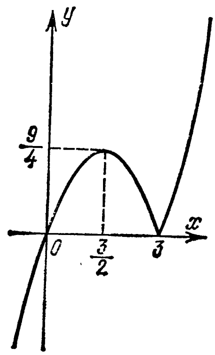
25.



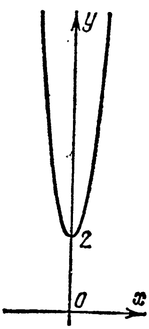
26.



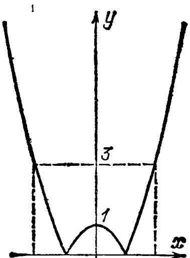
27.



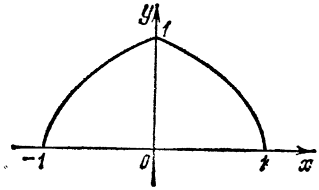
28.



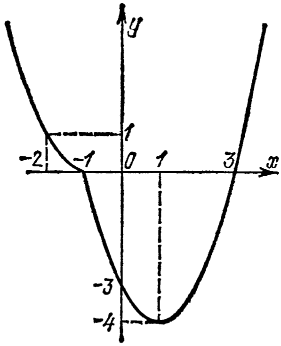
29.



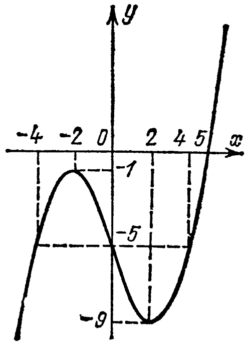
30.



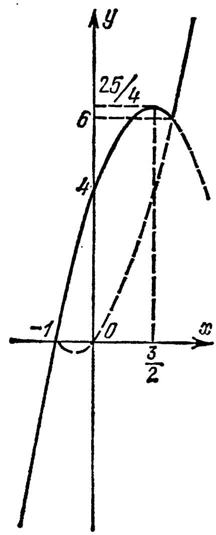
31.



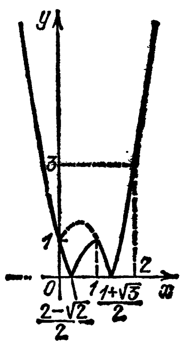
32.



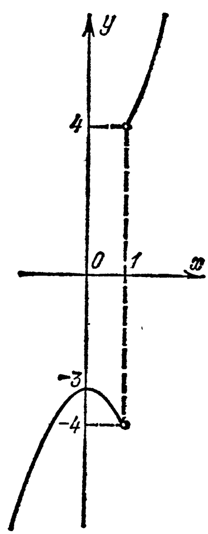
33.



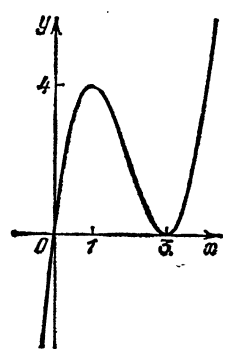
34.



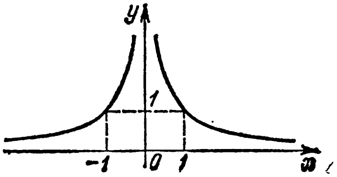
35.



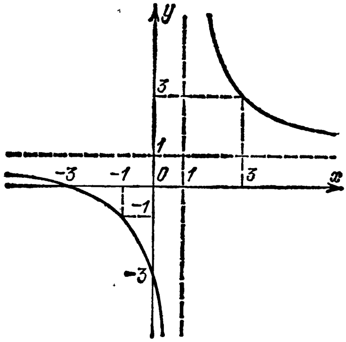
36.



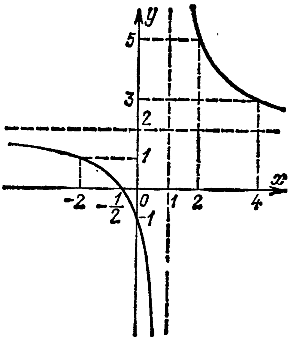
37.



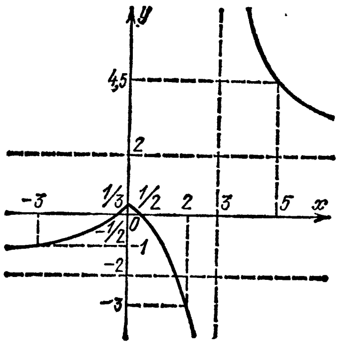
38.



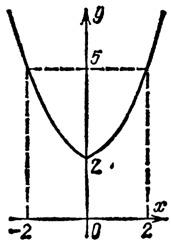
39.



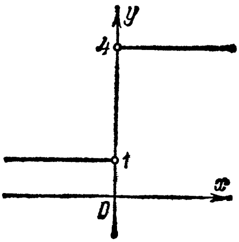
40.



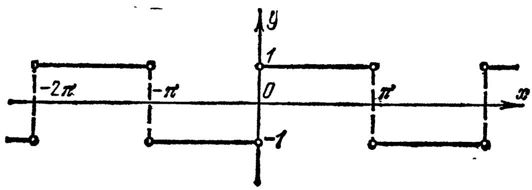
41.



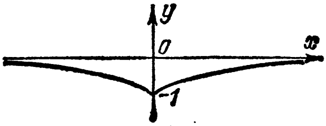
42.



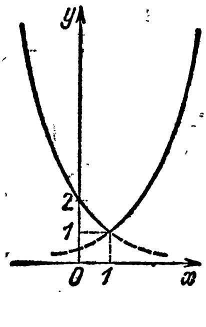
43.



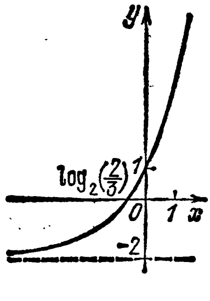
44.



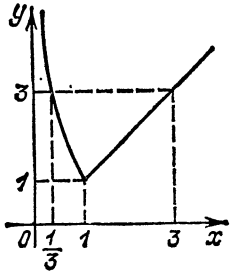
45.



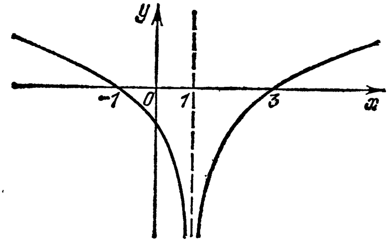
46.



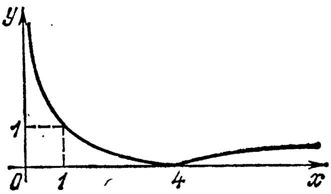
47.



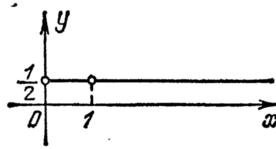
48.



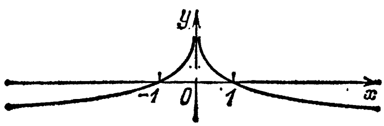
49.



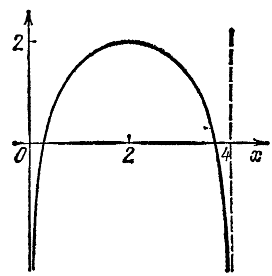
50.



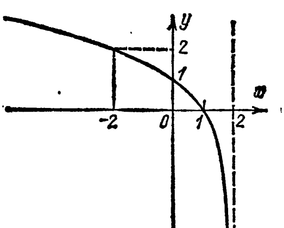
51.



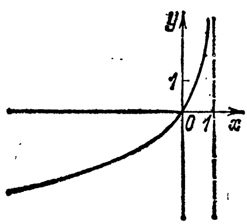
52.



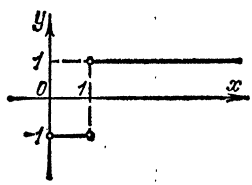
53.



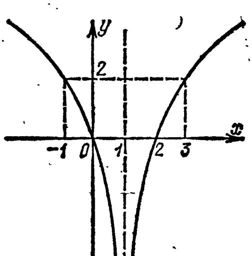
54.



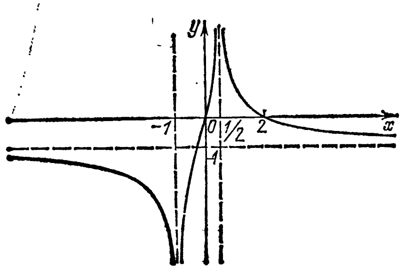
55.



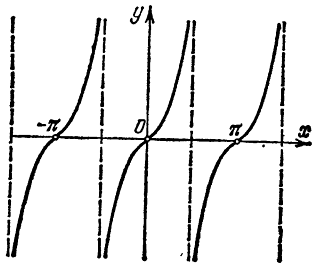
56.



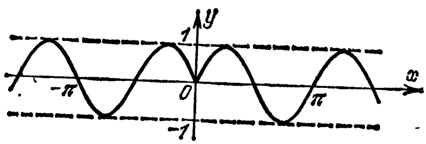
57.



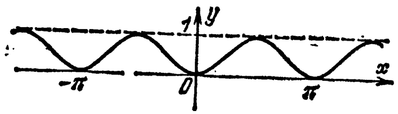
58.



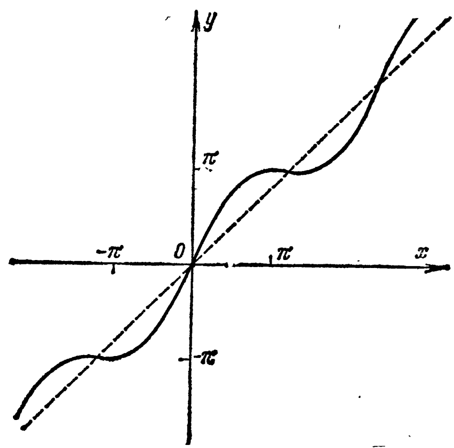
59.



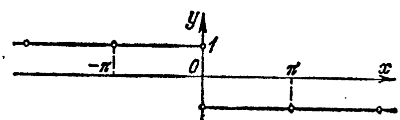
60.



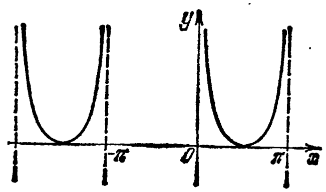
61.



62.

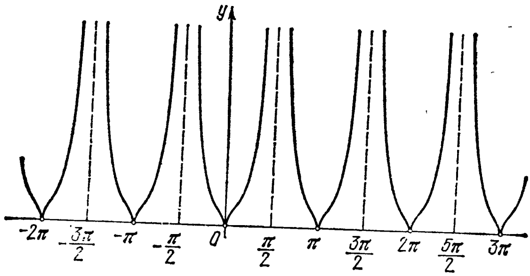


63.

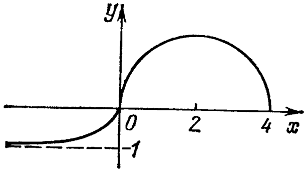


64.

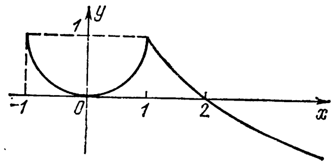
65.



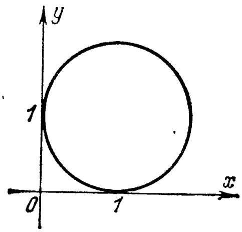
66.



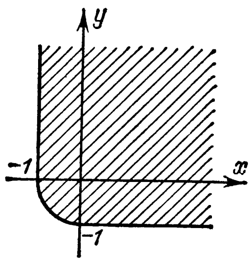
67.



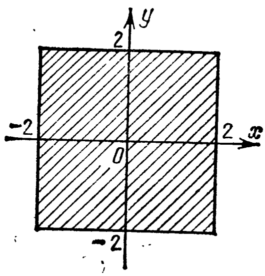
68.



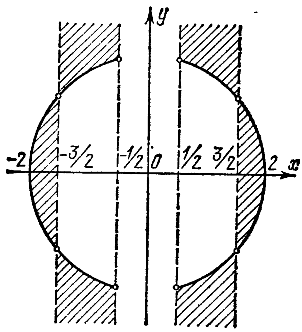
69.



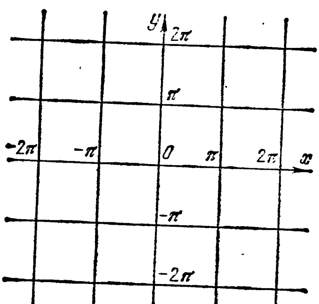
70.



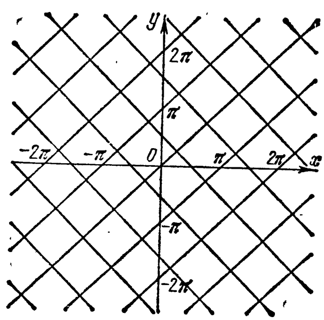
71.



72.



73.



74. $y_{\text{наим}}=2$ при всех $x \in [1;\ 3]$. Указание. Рассмотрите функцию при $x<1$; при $1 \leqslant x \leqslant 3$; при $x>3$.

75. $\{1-\sqrt{2}\}$. Указание. При $x \geqslant 0$ данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+2x+1=0, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

а при $x<0$ оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ x<0. \end{cases}$$

76. $z_{\text{наим}}=1$ при $x=0$, $y=-1$. Справедливость утверждения следует из тождества

$$z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 \equiv (x+y+1)^2+2(y+1)^2+1.$$

77. $]2;\ 7[$. 78. $]-4;\ -1[\ \cup\ ]1;\ 4[$.

79. $]-\infty;\ 2-\sqrt{5}\,[\ \cup\ ]\,2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\,[\ \cup\ ]\,2+\sqrt{5};\ +\infty\,[$.

80. $]-\infty;\ -3/2]\ \cup\ [-1;\ 1]\ \cup\ [3/2;\ +\infty\,[$.

82. Указание. Из условия задачи следует, что c, $a-b+c$, $4a-2b+c$ — целые числа, поэтому c, $a-b$, $2a$, $2b$, $a+b$ — числа целые. Далее, учитывая сделанный вывод, рассмотрите отдельно случай четного x и случай нечетного x.

84. $a=1$. Указание. Из условия задачи следует, что $x_1+x_2=5/a$, $x_1x_2=6/a$, $x_1=2x_2/3$. Решая эту систему, получаем $a=1$.

85. $a>0$. Решение. По условию

$$a-b+c>-4, \qquad (1)$$

$$a+b+c<0 \Rightarrow -a-b-c>0, \qquad (2)$$

$$9a+3b+c>5. \qquad (3)$$

Сложив (1) и (2), получим

$$-2b>-4. \qquad (4)$$

Сложив (2), (3), (4), получим $8a>1 \Rightarrow a>0$.

86. $\{3-2\sqrt{5};\ 3;\ 3+2\sqrt{5}\}$. Решение. Перепишем уравнение так:

$$((x^2-6x+9)-9)^2-2(x-3)^2=81$$

или

$$((x-3)^2-9)^2-2(x-3)^2=81,$$

т. е.

$$(x-3)^4-20(x-3)^2=0$$

или

$$(x-3)^2(x-3+\sqrt{20})(x-3-\sqrt{20})=0,$$

откуда

$$x_1=3-2\sqrt{5}, \quad x_2=3, \quad x_3=3+2\sqrt{5}.$$

87. $\{3/2;\ 2/3\}$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0,$$

положите $x+\dfrac{1}{x}=t$ и учтите, что $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

88. $7-x$. Указание. 1-й способ. Проведите группировку $x^3+2x^2-2x+5=(x^3-x)+(2x^2-2)-x+7=(x^2-1)(x+2)-x+7$. 2-й способ. Учитывая, что остаток от деления многочлена на x^2-1 имеет вид $ax+b$, примените теорему Безу.

89. Ни одного корня, если $a<-15\sqrt[3]{10}/16$; один корень, если $a=-15\sqrt[3]{10}/16$; два корня, если $a>-15\sqrt[3]{10}/16$. Решение. Рассмотрим функцию $y=x^4-5x-2a$. Значения x, при которых $y=0$, являются корнями заданного уравнения. График данной функции имеет две симметричные ветви, направленные от вершины в сторону возрастания y. Таким образом, в вершине $(x_0;\ y_0)$ функция принимает свое наименьшее значение. Найдем x_0 и y_0. Для этого найдем $y'=4x^3-5$ и приравняем производную 0. Тогда $4x_0^3-5=0$, $x_0^3=5/4$, $x_0=\sqrt[3]{10}/2$, а, следовательно,

$$y_0=x_0(x_0^3-5)-2a=-\frac{15\sqrt[3]{10}}{8}-2a.$$

Следовательно, если $y_0>0$, т. е. $a<-15\sqrt[3]{10}/16$, то вершина расположена выше оси Ox и график функции ось Ox не пересекает, следовательно, заданное уравнение не имеет корней. Если $y_0=0$, т. е. $a=-15\sqrt[3]{10}/16$, то график функции касается оси Ox и заданное уравнение имеет один корень: $x_0=\sqrt[3]{10}/2$. Если $a>-15\sqrt[3]{10}/16$, то вершина расположена ниже оси Ox, и график функции пересекает ось Ox в двух различных точках; следовательно, заданное уравнение имеет два корня.

90. Один при $a>-3$; два при $a=-3$; три при $a<-3$. Указание. Рассмотрите функцию $y=x^3+ax+2$. Если функция экстремумов не имеет, то корень один. Если функция имеет максимум и минимум и в точке максимума $y>0$, а в точке минимума $y<0$, то корней — три, и т. д.

92. $\{13/12\}$. **93.** $]-\infty;\ 0[$. **94.** $]-1;\ 0[$. **95.** $]-4;\ -3[$. **96.** $]-6;\ -2[\ \cup\ ]0;\ 3[$. **97.** $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]-1;\ 1/2[$. Указание. При решении следует учесть, что данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $(2x-4)/(x+1)>2$ и $(2x-4)/(x+1)<-2$. **98.** $[3;\ 4[\ \cup\ ]4;\ +\infty[$. **99.** $]-1;\ 0]\cup\{1\}$. **100.** $\{4\}$. **101.** $\{0\}$.

102. $[-2;\ 0[\ \cup\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Решение. Областью определения неравенства является множество чисел $[-2;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 2]$. Все $x\in X_1=[-2;\ 0[$ являются решениями неравенства, так как при этих значениях x левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Если $x\in\ ]0;\ 2]$, то обе части неравенства неотрицательны, поэтому в этом множестве чисел данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}0<x\leqslant 2,\\ 4-x^2\geqslant 1/x^2,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}0<x\leqslant 2,\\ x^4-4x^2+1\leqslant 0;\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}0<x\leqslant 2,\\ \left(x+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(x+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(x-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(x-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)<0.\end{cases}$$

Решением системы является множество чисел $X_2=\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Решением заданного неравенства является множество $X_1\cup X_2$.

103. $[-3/2;\ 1]$. Решение. Областью определения неравенства является множество чисел $[-3/2;\ 1]$. Обе части неравенства положительны при всех x из области определения, поэтому обе части неравенства можно возвести в квадрат. После соответствующих преобразований получаем неравенство

$$2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+3} < 21-x,$$

обе части которого неотрицательны в области определения. Освобождаясь от иррациональности, получаем неравенство $9x^2-38x+429>0$, которое выполняется при всех $x\in \boldsymbol{R}$. Следовательно, заданное неравенство выполняется во всей области определения. Замечание. В области определения $\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{1+{}^3/_2}<2$, $\sqrt{2x+3}\leqslant\sqrt{5}<3$, поэтому для всех x из области определения $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+3}<5$.

104. $]-\infty;\ 2[$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x+1<0, \\ 11-x\geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 11-x\geqslant 0, \\ x+1\geqslant 0, \\ (x+1)^2<11-x. \end{cases}$$

105. $[-\sqrt{2}/4;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1/3[$. Решение. Областью определения неравенства является множество чисел $[-\sqrt{2}/4;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \sqrt{2}/4]$. Так как $1-\sqrt{1-8x^2}\geqslant 0$, то для всех $x\in[-\sqrt{2}/4;\ 0[$ исходное неравенство выполняется. Пусть $x\in\ ]0;\ \sqrt{2}/4]$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$1-2x<\sqrt{1-8x^2}, \tag{1}$$

причем $1-2x>0$ для рассматриваемых значений x. Возводя в квадрат обе части неравенства (1), получим после преобразования неравенство $3x^2-x<0$, или $3x-1<0$, т. е. $x<1/3$. Следовательно, неравенство выполняется при всех $x\in[-\sqrt{2}/4;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1/3[$.

106. $[a/2;\ +\infty[$ при $a<0$; $[-a/2;\ +\infty[$ при $a\geqslant 0$. Решение. Если $x\geqslant 0$, то неравенство выполняется. При $x<0$ данное неравенство равносильно неравенству $(\sqrt{5x^2+a^2})^2\geqslant(-3x)^2$ или неравенству $x^2\leqslant a^2/4$, или $|x|\leqslant|a|/2$. Таким образом, неравенство выполняется также при всех $-|a|/2\leqslant x<0$. Объединяя полученные результаты, получаем приведенные выше промежутки.

107. $\{(c;\ 1-c)\}$ при $0\leqslant c\leqslant 1$; $\{(c;\ -1-c)\}$ при $-1\leqslant c\leqslant 0$. Указание. Решите систему графически.

108. $\varnothing$.

109. $\{(11/5;\ 1/5)\}$ при $a=3$; $\varnothing$ при $a\neq 3$. Решение. Решением системы двух первых уравнений является пара чисел $x=11/5$; $y=1/5$. Эта пара чисел является решением третьего уравнения заданной системы лишь при $a=3$.

110. $\{(-1;\ 2)\}$ при $a=-2$; $\varnothing$ при $a\neq 2$. **111.** $\{(1;\ 8),\ (8;\ 1)\}$. **112.** $\{(5;\ 7)\}$.

113. $\varnothing$, если $|a|<\sqrt{2}/2$ или $|a|>1$; четыре, если $|a|=\sqrt{2}/2$ или $|a|=1$; восемь, если $\sqrt{2}/2<|a|<1$. Указание. Решите задачу графически. При этом следует учесть, что $x^2+y^2=a^2$ при $a\neq 0$ есть уравнение окружности радиуса $|a|$; при $a=0$ уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0;\ 0)$; при $|a|<0$ это уравнение не имеет решений. Уравнению $|x|+|y|=1$ удовлетворяют координаты точек сторон квадрата с вершинами в точках $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ -1)$.

114. $a=\pm 1$, $a=\pm 2/\sqrt{5}$. Решение. Из второго уравнения системы находим $1+xy=-(1+x+y)$. Исключив $1+xy$ из первого уравнения системы, получаем уравнение

$$(a+1)x+(a-1)y=-a. \qquad (1)$$

При $a=1$, $x=-1/2$, $y=-3$; при $a=-1$, $y=-1/2$, $x=-3$, при $a\neq\pm1$ выражаем y из уравнения (1):

$$y=\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{1-a}x.$$

Исключая y из второго уравнения заданной системы, получаем для определения x уравнение

$$x^2+\frac{a+2}{a+1}x-\frac{a-2}{a+1}=0,$$

дискриминант которого равен нулю при $a=\pm2/\sqrt{5}$. При каждом из этих значений a система уравнений также имеет единственное решение.

115. $-1/2$. **116.** а) $\sqrt{5}$. б) 1. **117.** -18. **118.** 16. **119.** 4. **120.** 0. **121.** Положительный. **122.** Отрицательный.

123. $\frac{a+2b-1}{1-a}$. Решение. $\log_5 9{,}8=\frac{\lg 9{,}8}{\lg 5}=\frac{\lg(98/10)}{\lg(10/2)}=$
$=\frac{\lg 2+2\lg 7-\lg 10}{\lg 10-\lg 2}=\frac{a+2b-1}{1-a}$.

124. $(5-b)/(2ab+2a-4b+2)$. Решение. Так как $\log_{20}50=b$, то

$$\frac{\lg(100/2)}{\lg 20}=b\Rightarrow\frac{2-\lg 2}{1+\lg 2}=b\Rightarrow\lg 2=\frac{2-b}{1+b}. \qquad (1)$$

Так как $\lg 15=a$, то $\lg 3+\lg 5=a\Rightarrow\lg 3+\lg(10/2)=a\Rightarrow\lg 3-\lg 2=a-1\Rightarrow$
$\Rightarrow\lg 3=\lg 2+a-1$. Учитывая (1), находим

$$\lg 3=\frac{2-b}{1+b}+a-1. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получаем

$$\log_9 40=\frac{1+2\lg 2}{2\lg 3}=\frac{5-b}{2ab+2a-4b+2}.$$

125. $D(y)=]-\infty;\ 0]$. **126.** $D(y)=[2;\ 3[\ \cup\ ]3;\ 4]$. **127.** $D(f)=]1;\ 3]$. **128.** $D(y)=]0;\ 1]$. **129.** $D(f)=]5;\ +\infty[$.

130. $D(y)=]-\infty;\ -3]$. Указание. Для нахождения области определения заданной функции следует решить неравенство $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$, которое равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x^2-5x-24\geqslant 0,\\ x+2<0 \end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases} x^2-5x+24\geqslant 0,\\ x+2\geqslant 0,\\ x^2-5x-24>(x+2)^2. \end{cases}$$

131. $D(y)=\{]2\pi n;\ \pi(2n+1)[\ |\ n\in Z\}$.

132. $\{1/2\}$. **133.** $\{6\}$. **134.** $\{1/3\}$. **135.** $\{4-\sqrt{11}\}$. **136.** $\{16\}$. **137.** $\{-1;3\}$. **138.** $\{2\}$. **139.** $\{-9/10\}$. **140.** $\{5\}$.

141. $\{-2;\ 3\}$. Указание. Умножьте уравнение на 3^{-2x-12} и положите $3^{x^2-x-6}=t$. Для определения t получите квадратное уравнение.

142. $\{\pi(2n+1)/2\ |\ n\in Z\}$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду $2^{\sin^2 x}+8\cdot2^{-\sin^2 x}=6$ и положите $2^{\sin^2 x}=t$. Для определения t получите квадратное уравнение.

143. $\{-7/5;\ 61\}$. Указание. Для упрощения выкладок положите $\log_5(2x+3)=t$.

144. $\{2\}$. Указание. Для упрощения выкладок положите $2^x=t$.

145. $\{2\}$. Указание. Считая $|\log_8 x|<1$, левую часть уравнения запишите в виде $(\log_8 x)/(1-\log_8 x)$.

146. $\{2\pi k \mid k\in \mathbb{Z}\}$. 147. $\{\pi(8n+3)/4 \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

148. $\varnothing$. Решение. Данное уравнение не имеет смысла, если $\cos 2x=0$, т. е. если $x=\pi(2k+1)/4$, $k\in\mathbb{Z}$. Заметим, что

$$\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos 2x}=\frac{1-\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{-2(\sin^2 x-\cos^2 x)}=$$
$$=\frac{\sin x-\cos x}{-2(\sin x+\cos x)}=-\frac{\operatorname{tg} x-1}{2(1+\operatorname{tg} x)}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Исходное уравнение при этом имеет вид $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=1$. Решением последнего уравнения являются $x=\pi(4n+1)/4$, $n\in\mathbb{Z}$, но все эти числа исключены из рассмотрения (они получаются при $k=2n$). Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

149. $\{2\pi n+\operatorname{arctg}((\sqrt{17}-1)/4) \mid n\in\mathbb{Z}\}\equiv\{2\pi n+0{,}5\operatorname{arctg} 4 \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

150. $\{a\}$ при $a\in\,]0;\ 1[\,\cup\,]1;\ +\infty[$; $\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ 0]\cup\{1\}$.

151. $\{10;\ 100\}$. Решение. Применив основное логарифмическое тождество, данное уравнение запишем в виде $10^{\lg x(\lg x-3)}=10^{-2}\Rightarrow \lg^2 x-3\lg x+2=0\Rightarrow \lg x=1$, $\lg x=2$; $x_1=10$, $x_2=100$. Замечание. Можно решить уравнение, прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, и т. д.

152. $\{1;\ 100\}$.

153. $\{1/11\}$. Указание. Прологарифмируйте обе части уравнения по основанию x.

154. $\{100\}$. Указание. При решении примера следует учесть, что $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $b\neq 1$. В самом деле, применяя основное логарифмическое тождество, имеем

$$a^{\log_b c}=\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b c}=\left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a}=c^{\log_b a}.$$

155. а) При всех $a\in\,]-\infty;\ 0]$; б) при всех $a\in\,]0;\ +\infty[$.

156. Один корень при $a=0$; два при $a=1$; четыре при $0<a<1$; $\varnothing$ при $a<0$ и $a>1$. Указание. Решите задачу графически: постройте графики функций $y=x^2e^{2-|x|}$ и $y=4a$ и определите, сколько общих точек имеют графики этих функций при различных значениях a.

157. $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$. 158. $\{(-3;\ -9),\ (3;\ 9)\}$.

159. $\{(-1/4;\ -9/14),\ (5/4;\ -3/4)\}$. Указание. Учитывая первое уравнение системы $(3x+y)^{x-y}=9$, преобразуйте второе уравнение системы

$$324^{1/(x-y)}=2(3x+y)^2\Rightarrow 324=2^{x-y}\cdot(3x+y)^{2(x-y)}\Rightarrow 324=81\cdot 2^{x-y}\Rightarrow x-y=2.$$

Для определения x и y получите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=2,\\ (3x+y)^2=9.\end{cases}$$

160. $\{25;\ 36\}$. 161. $[0;\ +\infty[$. 162. $]\log_{3/2} 6;\ +\infty[$.

163. $]\log_2((5+\sqrt{29})/2); +\infty[$. 164. $]-\infty; -1[$. 165. $]0;2[$. 166. $[-15/4;+\infty[$.
167. $]3/2; 2[$. 168. $]1/3; 1[$. 169. $]-\infty; 0[\cup]0; 8[$; 170. $]1/9; 9[$.

171. $]0; 1[\cup]3; +\infty[$. Решение. $\frac{1}{\log_3 x}-1<0$, или $\frac{1-\log_3 x}{\log_3 x}<0$, или

$$\frac{\log_3 x-1}{\log_3 x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x<0,\\ \log_3 x>1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ x>3.\end{array}\right.$$

172. $]-8; 0[$. Решение. $\log_{1/2}\log_3(1-x)>-1 \Leftrightarrow 0<\log_3(1-x)<$ $<(1/2)^{-1} \Leftrightarrow 1<1-x<9 \Leftrightarrow -1>x-1>-9 \Leftrightarrow -8<x<0$.

173. $]1-\sqrt{5}; -1[\cup]3; 1+\sqrt{5}[$. Решение $(1/2)^{\log_2(x^2-2x-3)}>1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_2(x^2-2x-3)<0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-2x-3>0,\\ x^2-2x-3<1,\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x+1)(x-3)>0,\\ (x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})<0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-\sqrt{5}<x<-1,\\ 3<x<1+\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

174. $[-4; -3[\cup]3; 4]$.

175. $]2^{-\sqrt{2}}; 1/2[\cup]1; 2^{\sqrt{2}}[$. Указание. Переведите логарифмы к основанию 2, обозначьте $\log_2 x=t$, полученное неравенство решите методом интервалов.

176. $]0; 1[$.

177. $]4; +\infty[$. Указание. Так как в области определения неравенства основание логарифма больше единицы, то заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}x-4>0,\\ x-4<(x-3)^2.\end{array}\right.$$

178. $]3; 4[\cup]5; +\infty[$. Указание. При потенцировании рассмотрите два случая: 1) $0<x-3<1$; 2) $x-3>1$.

179. $]-2; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$. Указание. При потенцировании нужно рассмотреть два случая: 1) $0<x^2<1$; 2) $x^2>1$.

180. $[7; +\infty[$.

181. $]0; (3-\sqrt{5})/10[\cup](3+\sqrt{5})/10; 4/5[\cup]1; +\infty[$. Решение. Преобразуем неравенство

$\log_{x+0,2} 2<\log_x 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(x+0,2)}<\frac{2}{\log_2 x} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x-2\log_2(x+0,2)}{\log_2 x\cdot\log_2(x+0,2)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x}{(x+0,2)^2}\cdot\log_2 x\cdot\log_2(x+0,2)<0; \qquad (1)$$

$\log_2 x$ меняет знак при переходе x через точку $x_1=1$; $\log_2(x+0,2)$ меняет знак при переходе x через точку $x_2=4/5$; $\log_2\frac{x}{(x+0,2)^2}$ меняет знак при переходе x через точки $x_3=(3-\sqrt{5})/10$, $x_4=(3+\sqrt{5})/10$. Больше нет точек, при переходе x через которые левая часть неравенства (1) меняла бы знак. Нанеся эти точки на ось Ox, учтя, что при $x\leqslant 0$ неравенство не определено, а при $x>1$ левая часть неравенства отрицательна, методом интервалов легко найти множество решений.

182. $]-3/2; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 3[$. Указание. При потенцировании рассмотрите два случая: 1) $0<2x+3<1$; 2) $2x+3>1$.

183. $]1;\ 3[$. Указание. Так как $x > 1$, то заданное неравенство равносильно системе неравенств $(x+3)/(x-1) > x$ и $x > 1$.

184. $\{](2n-1)\pi;\ 2\pi n[\ |\ n\in Z\}$. Указание. Данное неравенство равносильно неравенству $2^{-x}-100\sin x > 2^{-x} \Leftrightarrow -100\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$.

185. $]-1;\ -\sqrt{1-a}[\ \cup\ ]\sqrt{1-a};\ 1[$ при $0 < a < 1$; $\varnothing$ при остальных значениях a.

186. $]1;\ 2[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$. Указание. Неравенство определено при $x\in$ $\in]0;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$. В этой области неравенство равносильно неравенству

$$\log_4\frac{x+2}{x^2}\cdot\log_4|x-2| < 0.$$

Функция в левой части последнего неравенства меняет знак при переходе x через точки $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Неравенство можно решить методом интервалов с учетом области определения.

187. $]0;\ \arcsin((\sqrt{5}-1)/2)[$. Указание. Заданная система неравенств равносильна системе неравенств

$$\begin{cases}\cos x > \operatorname{tg} x,\\ \operatorname{tg} x > 0,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x > \sin x,\\ \\ 0 < x < \pi/2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x+\sin x-1 < 0,\\ \\ 0 < x < \pi/2.\end{cases}$$

188. $|a| > 1/e$. **189.** $\sin 1980°$. **190.** $\operatorname{tg} 1$. **191.** $\sin 2$. **192.** $-7\pi/6$.

193. $-7/25$. Решение $\sin(\arcsin(3/5)-\arccos(3/5))=\sin(\arcsin(3/5))\times$ $\times\cos(\arccos(3/5))-\cos(\arcsin(3/5))\sin(\arccos(3/5))=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}-\sqrt{1-\frac{9}{25}}\times$ $\times\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{7}{25}$.

194. $-\sqrt{3}$. **195.** $3\pi/4$.

196. $\pi/2$. Решение. $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\operatorname{arcctg}\sqrt{2}=$ $=\pi/2$, так как при любых $x\in R$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\pi/2.$$

197. $4/5$. Решение. $\sin(2\operatorname{arctg} 2)=2\sin(\operatorname{arctg} 2)\cdot\cos(\operatorname{arctg} 2)=$ $=2\cdot\frac{2}{\sqrt{1+4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{5}$.

198. $3/4$. Решение. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\arccos(1/8))}{2}}=$ $=\sqrt{\frac{1+1/8}{2}}=\frac{3}{4}$.

199. $1/\sqrt{5}$. Решение. $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\operatorname{arctg}(4/3)}{2}}=$ $=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(4/3)^2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

200. $-\pi/7$. Решение. $\arcsin(\sin(8\pi/7))=\arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{8\pi}{7}\right)\right)=$ $=-\frac{\pi}{7}$.

201. $6\pi/7$. Решение. $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)=\arccos\left(\cos\left(2\pi-\frac{8\pi}{7}\right)\right)=$
$=\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{7}\right)=\frac{6\pi}{7}$.

202. $\pi/7$. Решение. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi}{7}-\pi\right)\right)=\frac{\pi}{7}$.

203. $24/25$. Решение. $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{49}{25}\Rightarrow\sin\alpha+1=\frac{49}{25}$.

204. b^2-1, если $|b|\leqslant\sqrt{2}$; $\varnothing$, если $|b|>\sqrt{2}$.

205. $-7/25$. Решение. $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=-\frac{14}{50}=$
$=-\frac{7}{25}$.

206. $7/9$. Решение. $\frac{\cos^4\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^3\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1+27}{4\cdot 9}=\frac{7}{9}.$$

207. $10/11$. Решение. $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{tg}^3\alpha+3}=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^3\alpha+3}=\frac{10}{11}.$$

208. a^2-2, если $|a|\geqslant 2$; $\varnothing$, если $|a|<2$.

209. -3 или $-1/3$. Указание. Учтите, что

$$\sin\alpha=\frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)}=\frac{2\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}.$$

210. 2.

211. $\sqrt{10}-3$. Решение. Так как $0<\alpha<\pi/4$, то $\cos 2\alpha=$
$=\sqrt{1-(0{,}6)^2}=0{,}8$; $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=$
$=\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}}=\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}=\sqrt{10}-3$.

212. -33. **213.** $\sin\alpha=-12/13$; $\cos\alpha=-5/13$; $\operatorname{ctg}\alpha=5/12$.

214. $\sin 2\alpha=120/169$, $\sin(\alpha/2)=5/\sqrt{26}$. **215.** $1/2\sin^2(\alpha/2)$.

216. Указание. Преобразуйте выражение $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi/4)$.

217. Доказательство. $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta-\cos(\pi-(\alpha+\beta))=$
$=\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$.

218. $\sin 2\alpha$. **219.** Указание. Примените формулы $\cos^2\beta=\frac{1+\cos 2\beta}{2}$,
$\sin^2\beta=\frac{1-\cos 2\beta}{2}$.

220. Доказательство. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=$
$=2(\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha\cos^4\alpha+\cos^6\alpha)-2\cdot 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+$
$+\cos^2\alpha)-3(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+3\cdot 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=2(\sin^2\alpha+$
$+\cos^2\alpha)^3-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=2-3+1=0$.

223. Решение. $\frac{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}{(1+\sin x)(1-\cos 2x)}=\frac{(1+\cos x)\,2\cos^2 x}{(1+\sin x)\,2\sin^2 x}=$

$$=\frac{(1+\cos x)(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1-\sin x}{1-\cos x}.$$

224. $\{\pi n,\ \pi(2k+1)/8 \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$.

225. $\{\pi(2n+1)/2 \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$.

226. $\{2\pi n;\ 2\pi(3k+1)/3 \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$. Решение. 1-й способ.

$\sqrt{3}\sin x=1-\cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin(x/2)\cos(x/2)=$

$=2\sin^2(x/2) \Leftrightarrow 2\sin(x/2)\left(\sin(x/2)-\sqrt{3}\cos(x/2)\right)=0 \Rightarrow \sin(x/2)=0,$

$x=2\pi n$; $\operatorname{tg}(x/2)=\sqrt{3}$, $x=2\pi(3k+1)/3$, $n,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

2-й способ. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

227. $\{\pi n;\ \pi(6k\pm 1)/3 \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$.

228. $\{\pi(2n+1)/4;\ \pi(6k\pm 1)/3 \mid k,\ n\in \boldsymbol{Z}\}$.

229. $\{\pi n \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$. Решение. $\operatorname{tg}^2 33x=\cos 2x-1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 33x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=0,\\ \operatorname{tg} 33x=0,\end{cases} \Rightarrow x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

230. $\{\pi(6n+(-1)^n)/6 \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$.

231. $\{\pi n/7;\ \pi(4k+3)/2 \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$. Решение. $\sin 3x+\cos 4x-4\sin 7x=$
$=\cos 10x+\sin 17x \Leftrightarrow (\sin 3x-\sin 17x)+(\cos 4x-\cos 10x)-4\sin 7x=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2\sin 7x\cos 10x+2\sin 3x\sin 7x-4\sin 7x=0 \Leftrightarrow -2\sin 7x(\cos 10x-\sin 3x+$
$+2)=0$, откуда $\sin 7x=0$, $x=\pi n/7$, $n\in \boldsymbol{Z}$; или

$$\cos 10x-\sin 3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 10x=-1,\\ \sin 3x=1.\end{cases} \qquad (1)$$

Решим систему (1). Сначала решим второе уравнение системы (1):

$$\sin 3x=1,\ 3x=\pi(4m+1)/2,\ x=\pi(4m+1)/6.$$

Из этих чисел выберем те, которые удовлетворяют первому уравнению системы (1),

$$\cos(10\pi(4m+1)/6)=\cos(5\pi(4m+1)/3)=-1. \qquad (2)$$

Равенство (2) имеет место при $m=2+3k$. Следовательно, системе уравнений (1) удовлетворяют числа $x=\pi(4k+3)/2$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Объединяя полученные результаты, находим $x\in\{\pi n/7;\ \pi(4k+3)/2 \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$.

232. $\{\pi(2n+1)/8 \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$. Решение. Применяя формулы $\cos^2\alpha=$ $=(1+\cos 2\alpha)/2$, $\sin^2\alpha=(1-\cos 2\alpha)/2$, имеем:

$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\cos^2 2x+\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x=1 \Leftrightarrow 1+\cos 4x=1 \Rightarrow \cos 4x=0,\ x=\pi(2n+1)/8,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

233. $\varnothing$. **234.** $\{]-\pi(2k+1)/2;\ -\pi k]\cup[\pi k;\ \pi(2k+1)/2[\mid k\in \boldsymbol{N}\}$.

235. Не имеет. Решение. Уравнение $4\sin 2x+\cos x=5$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sin 2x=1,\\ \cos x=1.\end{cases}$$

Уравнению $\cos x = 1$ удовлетворяют числа $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ни одно из этих чисел не удовлетворяет первому уравнению системы.

236. $\{2\pi n;\ 2\pi k - 2\operatorname{arctg}(3/5) \mid n,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Решение. $5\cos x - 3\sin x = 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10\sin^2(x/2) + 6\sin(x/2)\cos(x/2) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x/2)(5\sin(x/2) + 3\cos(x/2)) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin(x/2) = 0,\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

$$5\sin(x/2) + 3\cos(x/2) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x/2) = -3/5,$$
$$x = -2\operatorname{arctg}(3/5) + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Объединяя полученные результаты, находим искомое решение.

237. При иррациональных значениях a. Указание. Рассмотрите отдельно уравнение при a рациональных и a иррациональных.

238. Три. Указание. Определите число точек пересечения графиков функций $y = \log_{3\pi/2} x$ и $y = \cos x$.

239. $\{]\pi(24k+1)/12;\ \pi(24k+17)/12[\ \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Замечание. Заданное неравенство равносильно неравенству $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{2}$.

240. $\{]\pi(12n-5)/6;\ \pi(4n+1)/2[\ \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Указание. Заданное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 2$, которое не имеет решений, и $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 1/2$, которому удовлетворяют $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n <$ $< x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

241. $f_{\max}(x) = 5$.

242. Доказательство. По условию

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2. \tag{1}$$

Нужно доказать, что

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}, \tag{2}$$

или

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} - \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} = 0,$$

или

$$\frac{(b^2-a^2) - (c^2-b^2)}{(a+c)(b+c)(a+b)} = 0. \tag{3}$$

Из равенства (1) следует справедливость равенства (3), а следовательно, и равенства (2).

243. 3069/256. **244.** Да. Решение. При любых $n \in \mathbf{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{(n+1)^2 + (n+1) + 1} - \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} =$$
$$= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 3} - \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{2(n^2 + n - 1)}{(n^2 + n + 1)(n^2 + 3n + 3)} > 0.$$

245. $-1/9$. Решение. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{1 - 9n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2} - 9} =$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2} - 9\right)} = -\frac{1}{9}.$$

246. 0. **247.** 1/4.

248. 1. Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4}+n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+2+3+\ldots+n)}{n^2+4n+12}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+4n+12}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}}=1.$$

249. 1/2.

250. 1. Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2/5)^n+1}{(3/5)^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1.$

251. 5.

252. 1. Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1.$

253. 6/5. **254.** 1/4. **255.** —7. **256.** 13/5.

257. 2. Решение. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{(x+4)-1}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{x+4}+1\right)=2.$

258. $\sqrt{6}/6$. **259.** —1/56.

260. 4. Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{((2x+3)-1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{((5+x)-4)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$

$=2\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{2x+3}+1}=2\cdot\frac{4}{2}=4.$

261. $-\sqrt{3}/24$.

262. 3. Решение. Положим $\sqrt[6]{x}=t$, $t\to 2$ при $x\to 64$. Тогда

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=3.$$

263. 3/2.

264. 2/5. Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 5x\sin x}{\sin^2 5x}=$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$

265. 2/3. Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x\left(\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}+\sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt[3]{1-\sin x}+\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}+\sqrt[3]{1-\sin^2 x}+\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\frac{2}{3}.$$

266. 8. Решение. Положим $2^x=t$, $t\to 4$ при $x\to 2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}=\lim_{t\to 4}\frac{t+\frac{8}{t}-6}{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 4}\frac{t^2-6t+8}{\sqrt{t}-2}=$$

$$=\lim_{t\to 4}\frac{(\sqrt{t}+2)(t-2)(t-4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}(\sqrt{t}+2)(t-2)=8.$$

267. $a(a+\sqrt{3})$. Указание. Длины последовательных звеньев построенной бесконечной ломаной образуют убывающую геометрическую прогрессию. Под длиной бесконечной ломаной подразумевается сумма этой прогрессии.

268. а) $-\frac{3\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}$; б) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. **269.** $\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)\ln 2}$.

270. $6x^2\operatorname{tg}x+\frac{2x^3-5}{\cos^2 x}$. **271.** а) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; б) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$; в) $6(\sin 2x+8)^2\cos 2x$.

272. —1. **273.** 40. **274.** 1/8. **275.** —2.

276. Функция возрастает на интервалах $]-\infty; -1[$ и $]1; +\infty[$, убывает на интервалах $]-1; 0[$ и $]0; 1[$.

277. Функция возрастает на интервале $[-\infty; -3/4[$, убывает на интервале $]-3/4; 1/4[$. Замечание. Не забудьте учесть область определения функции.

278. Функция возрастает на интервале $]0; 2[$ и убывает на интервалах $]-\infty; 0[$ и $]2; +\infty[$.

279. Функция возрастает на интервале $]e; +\infty[$ и убывает на интервалах $]0; 1[$ и $]1; e[$. Замечание. Не забудьте учесть область определения функции.

280. Функция возрастает на интервале $\left]-1/\sqrt[3]{2}; +\infty\right[$ и убывает на интервале $\left]-\infty; -1/\sqrt[3]{2}\right[$.

282. Доказательство. $f'(x)=6(x^8-x^5+x^2-x+1)=$
$=6x^2\left(x^6-x^3+\frac{1}{4}\right)+3x^2+6\left(\frac{x^2}{4}-x+1\right)=6x^2\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+3x^2+6\left(\frac{x}{2}-1\right)^2>$
>0 при всех $x\in\boldsymbol{R}$.

284. Решение. $f'(x)=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$. Дискриминант квадратного трехчлена

$$D=4(a-1)^2-8(a^2-1)=-4(a-1)(a+3)$$

отрицателен при всех $a\in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$. Так как при всех этих значениях a коэффициент при x^2 положителен, то квадратный трехчлен положителен при всех $x\in\boldsymbol{R}$. При $a=1$ имеем $f'(x)=2>0$. При $a=-1$ имеем $f'(x)=$ $=-4x+2$, $f'(x)\leqslant 0$ при $x\geqslant 1/2$. При $-1<a<1$ коэффициент при x^2 меньше нуля, поэтому при каждом из этих значений a существуют x, при которых $f'(x)<0$. При $a=-3$ имеем $f'(x)=2(2x-1)^2=0$ только при $x=1/2$. При $-3<a<-1$ квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. Если $x_1<x_2$, то $f'(x)<0$ для всех $x\in]x_1; x_2[$. Из изложенного следует, что $f'(x)>0$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$ при любом $a\in]-\infty; -3]\cup[1; +\infty[$ и только при этих значениях a.

285. При всех $a\geqslant 0$. Замечание. $f'(x)=e^{-x}(e^x+a)(2e^x+1)>0$ при всех $a\geqslant 0$.

286. При всех $a \in [1; +\infty[$. Решение. $y' = \cos x - 2a\cos 2x - \cos 3x + 2a = 4a\sin^2 x + 2\sin x \sin 2x = 4a\sin^2 x + 4\cos x \sin^2 x = 4\sin^2 x\,(a+\cos x)$. При $a \geq 1$ имеем $y' > 0$ при всех x, исключая точки $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, в которых $y' = 0$. Поэтому функция возрастает при всех $a \geq 1$.

287. При всех $a \in]-\infty; -3]$. **288.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. **289.** $x_1 = -5$; $x_2 = 1$.

290. $x = 1/2$—точка минимума, $y(1/2) = (1 - 4\ln 2)/4$.

291. $a \in]-1; 3[$. Решение. $y' = 3(x^2 - 2ax + a^2 - 1) = 3(x - a + 1) \times (x - a - 1)$. Для того чтобы корни трехчлена принадлежали интервалу $]-2; 4[$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $a - 1 > -2$, $a + 1 < 4$, следовательно, чтобы $a \in]-1; 3[$.

292. $f_{\text{наиб}} = 5$; $f_{\text{наим}} = 11/4$. **293.** $f_{\text{наиб}} = f(1) = 5$; $f_{\text{наим}} = f(1/2) = 3$. **294.** $f_{\text{наиб}} = f(100) = 10 - 2\sqrt{10}$; $f_{\text{наим}} = f(1) = -1$. **295.** $f_{\text{наиб}} = f(-5) = e^{48}$; $f_{\text{наим}} = f(2) = 1/e$. **296.** $y_{\text{наиб}} = y(4) = 6$; $y_{\text{наим}} = y(1/16) = -1/8$.

297. При всех $a \in]-\infty; -3[\cup]3; 29/7[$. Решение. $f'(x) = 3(x^2 + 2(a-7)x + a^2 - 9)$. Для того чтобы в точке x_1 функция $f(x)$ имела максимум, нужно, чтобы при переходе x через точку x_1 в порядке возрастания функция $f'(x)$ меняла свой знак с плюса на минус. Поэтому квадратный трехчлен

$$x^2 + 2(a-7)x + a^2 - 9 \qquad (1)$$

должен иметь два действительных корня x_1 и x_2. Если $x_1 < x_2$, то x_1—точка максимума, так как $f'(x) > 0$ при $x < x_1$, а при $x_1 < x < x_2$ производная $f'(x) < 0$. Так как (по условию задачи) точка максимума должна быть положительной, то оба корня квадратного трехчлена (1) должны быть положительными (при этом $x_1 < x_2$). Это будет тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (a-7)^2 - (a^2 - 9) > 0, \\ a - 7 < 0, \\ a^2 - 9 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (2), получаем $a \in]-\infty; -3[\cup]3; 29/7[$.

298. $a = 2$. Замечание. Из условия задачи следует $f'(x) = 6(x - 2a) \times (x - a)$. Корни x_1 и x_2 трехчлена $x^2 - 3x + 2a^2$ должны быть действительными и различными, при этом, если $x_1 < x_2$, то x_1—точка максимума, x_2—точка минимума.

299. При всех $a \in]1; +\infty[$. Замечание. Из условия задачи следует

$$f'(x) = ax^2 + 2(a+2)x + a - 1.$$

Нужно рассмотреть три случая: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. При $a > 0$ и при $a < 0$ нужно рассматривать те значения a, при которых оба корня действительны, при этом если $x_1 < x_2$, то при $a > 0$ минимум в точке x_2, а при $a < 0$ минимум в точке x_1.

300. $a \in]-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}[$. Решение. Решим неравенство

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0, \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + x + 2}{(x+3)(x+2)} \leq 0.$$

Так как $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ при $x \in \mathbf{R}$, то неравенство выполняется, если $(x+2)$ и $(x+3)$ будут разных знаков, т. е. $x + 2 < 0$ и $x + 3 > 0$ или $x < -2$ и $x > -3$. Следовательно, неравенство выполняется для всех $x \in]-3; -2[$. Найдем критические точки функции $y = 1 + a^2 x - x^3$. Находим

$y'=a^2-3x^2$ и приравниваем ее нулю, получаем две критические точки $x_1=-|a|/\sqrt{3}$ и $x_2=|a|/\sqrt{3}$. Производная y' на интервалах $]-\infty; -|a|/\sqrt{3}[$ и $]|a|/\sqrt{3}; +\infty[$ отрицательна, а на интервале $]-|a|/\sqrt{3}; |a|/\sqrt{3}[$ положительна; следовательно, $x_1=-|a|/\sqrt{3}$ есть точка минимума функции и она должна удовлетворять неравенству

$$-3<-|a|/\sqrt{3}<-2, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{3}<|a|<3\sqrt{3}.$$

Итак, условиям задачи удовлетворяют все $a\in]-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}[$.

301. $x=\pi/4$.

302. $-1/2$. Решение. Пусть x — искомое число. Нужно найти точку минимума функции $f(x)=x+x^2$. Так как $f'(x)=2x+1$, то $x=-1/2$ — точка минимума функции $f(x)$. **303.** 1.

304. Треугольник со сторонами a, a, $a\sqrt{2}$ и площадью $a^2/2$. Решение. Пусть b — длина основания треугольника, S — площадь треугольника. Так как $S=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}=S(b)$, то

$$S'=(2a^2-b^2)/2\sqrt{4a^2-b^2}; \quad S'(b)=0 \Rightarrow b=a\sqrt{2}, \quad S_{\max}=a^2/2.$$

305. $\pi/3$. Решение. Пусть l — длина боковой стороны, a — длина основания, h — высота, S — площадь треугольника. Тогда $l=2R\cos(\alpha/2)$, $h=2R\cos^2(\alpha/2)=R(1+\cos\alpha)$, $a/2=2R\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)=R\sin\alpha$, $S=ah/2=R^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$. Найдем максимум функции $S(\alpha)$. Имеем $S(0)=S(\pi)=0$, $S(\alpha)>0$ при $0<\alpha<\pi$. Далее $S'(\alpha)=R^2(\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=R^2(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=2R^2\cos(\alpha/2)\cos(3\alpha/2)$. На интервале $[0; \pi]$ находятся критические точки $x=\pi$ и $x=\pi/3$; отбросив посторонние решения, найдем $\alpha=\pi/3$.

306. 2. **307.** (1; 1). **308.** $\pi/3$. **309.** $y=-x-2+2\ln 2$. **310.** $y=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$. **311.** $y=12x-16$. **312.** $y=x/e$. **313.** $y=2$. **314.** $y=-4$. **315.** $y=-4x$, $y=4x-8$. **316.** $y=-5x+2$. **317.** Решение. Пусть x_0 — абсцисса точки касания прямой и гиперболы. Ординатой точки касания будет $y_0=a^2/x_0$, а уравнением касательной уравнение

$$y=\frac{a^2}{x_0}-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

Найдем координаты точек пересечения касательной с осями координат. Положив $x=x_1=0$, получаем $y_1=2a^2/x_0$, $M_1(0; 2a^2/x_0)$. Положив $y=y_2=0$, получаем $x_2=2x_0$, $M_2(2x_0; 0)$. Площадь прямоугольного треугольника M_1OM_2 равна

$$\frac{1}{2}|OM_1||OM_2|=\frac{1}{2}\frac{2a^2}{|x_0|}\cdot 2|x_0|=2a^2.$$

319. $x_1=0$, $x_2=3$.

320. Да. Решение. Найдем координаты точек пересечения прямой и гиперболы. Для этого решим уравнение

$$\frac{1}{x}=\frac{4-x}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x_0=2, \ y_0=1/2.$$

Так как прямая и гипербола имеют при этом только одну общую точку, то прямая касается гиперболы.

321. [1/4; 3/2]. **322.** а) Четная; б) и в) нечетные. **323.** 2^{x^2}; 2^{2x}.

324. $f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$. Указание. Запишите функцию в виде $f(x)=ax^2+bx+c$.

325. $x=-\sqrt{y+1}$, $y\in[-1;\ +\infty[$.

326. $A\,(1/2;\ 3/4)$. Решение. Пусть x_0, y_0—координаты точки A. Так как $y'(x_0)=2-2x_0$, то уравнением касательной к параболе в точке A будет $y=x_0^2+(2-2x_0)\,x$. Координаты точек пересечения касательной с прямыми $x=0$ и $x=1$ будут: $x_1=0$, $y_1=x_0^2$; $x_2=1$, $y_2=x_0^2-2x_0+2$. Площадь трапеции

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}\cdot 1=x_0^2-x_0+1.$$

Тогда $S'=2x_0-1$. Заметим, что $S'<0$ при $x_0<1/2$; $S'>0$ при $x_0>1/2$, следовательно, в точке $x_0=1/2$ площадь S имеет минимум. Таким образом $x_0=1/2$, $y_0=3/4$.

327. $y=(5-2\operatorname{ctg}3x)/3$.

328. $F(x)=(2\sin 4x+7)/8$.

329. $x=2$. Решение. $F(x)=-\cos\pi x+x^2-4x+C$, $F(1)=-\cos\pi+1-4+C=3 \Rightarrow C=5$. Решим уравнение

$$F(x)=0 \Leftrightarrow -\cos\pi x+x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+2\sin^2(\pi x/2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0, \\ \sin(\pi x/2)=0, \end{cases} \Rightarrow x=2.$$

330. $x-\cos x+C$. **331.** 1. **332.** $4\sqrt{2}/3$. **333.** 3/8. **334.** $2\ln(e+1)$.

335. $\pi/2$. Указание. Примените формулу $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$.
336. 1/2. Указание. Примените формулу $\sin x\cos x=(\sin 2x)/2$.

337. 2. Указание. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin x|\,dx=2\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\,dx$.

338. 0. Указание. Примените формулу $\sin\alpha\cos\beta=(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))/2$.

339. 125/3. **340.** 50/3. **341.** 243/4. **342.** 5/12. **343.** $(4-\pi)/2$. **344.** $(4-\pi)/4$. **345.** 64/3. **346.** 7/3. **347.** $(4+\pi)/2$.

348. 44/27. Указание. Так как фигура, ограниченная кривой $y=-3x^2-|x|+2$ и прямой $y=0$, симметрична относительно оси Oy, то следует вычислить площадь фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной кривой $y=-3x^2-x+2$ и прямыми $x=0$ и $y=0$, а затем полученный результат удвоить.

349. 8/3. Указание. Так как фигура симметрична относительно осей Ox и Oy, то достаточно вычислить площадь фигуры, расположенной в первом квадранте, ограниченной кривой $y=1-x^2$ и прямыми $x=0$ и $y=0$, и полученный результат умножить на 4.

350. Нет, так как площадь фигуры равна $e-\frac{1}{e}>2{,}7-\frac{1}{2{,}7}>2$.

351. 2/3.

352. $y=2x/3$. Решение. Площадь криволинейного треугольника

$$S=\int\limits_0^1(2x-x^2)\,dx=\frac{2}{3}.$$

Искомая прямая $y=kx$ отсекает от криволинейного треугольника прямоугольный треугольник, площадь которого $S/2=1/3$, а основание равно 1, следовательно, другой его катет — высота треугольника — равен 2/3 и, следовательно, $k=2/3$.

353. $k=0$. Площадь равна $20\sqrt{5}/3$. Указание. Постройте графики функций $y=x^2-3$ и $y=kx+2$. Геометрически докажите, что площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-3$ и прямой $y=2$, — наименьшая. При этом площадь

$$S=2\int_0^{\sqrt{5}}(2-(x^2-3))\,dx=2\int_0^{\sqrt{5}}(5-x^2)\,dx=\frac{20\sqrt{5}}{3}.$$

354. $3\pi^2/8$. Решение.

$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 x\,dx=2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx=2\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{3\pi^2}{8}.$$

355. $a_1=1/2$, $a_2=2$. **356.** При всех $a\in[-2;\ 4]$. **357.** $6\sqrt{2}$. **358.** $k\in\varnothing$. **359.** $\sqrt{14}/2$. Указание. Так как $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(3\lambda;\ -2\lambda;\ \lambda)$. **360.** $\pi-\arccos(11/\sqrt{406})$. **361.** $m=-1/2$. **362.** $a=\sqrt{2/3}$.

363. $\boldsymbol{a}=(5;\ 7/2;\ -4)$. Указание. Положив $\boldsymbol{a}=(x;\ y;\ z)$, для определения x, y, z получаем систему уравнений $x+2y+3z=0$, $-2x+4y+z=0$, $x-2y+z=-6$.

364. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=15$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{593}$.

365. Указание. Преобразуйте выражение $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0$. **373.** Да.

374. Указание. Докажите, что если a — длина стороны треугольника, вписанного в окружность радиуса R, лежащая против угла α, то $a=2R\sin\alpha$, и воспользуйтесь этим результатом.

375. Ромб, когда диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны. Квадрат, когда они вдобавок равны.

378. Указание. Примените векторную алгебру. **381.** $(\sqrt{2}-1):1$. **382.** $\pi/3$; $2\pi/3$. **383.** 3, 5, 7; 4, 5, 6; 5, 5, 5. **384.** 36°, 36°, 108°.

385. $\arccos(4/5)$. Указание. Примените векторную алгебру.

386. $h^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Указание. Пусть a и b — длины оснований трапеции. Постройте чертеж и докажите, что $(a+b)/2=h\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

387. $2(\sqrt{2}-1)a^2$.

388. Периметр квадрата. **389.** Да. **390.** $18\sqrt{2}$ см. **391.** 2 радиана. **392.** На 125%.

393. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\pi/4<\alpha<3\pi/4$. **394.** $\sqrt{S}(\operatorname{ctg}(\alpha/2)-1)/2$.

395. $\sqrt{(4H^3+3V)/4H}$. **396.** $\arccos(\operatorname{tg}(\alpha/2))=\arcsin(\sqrt{\cos\alpha}/\cos(\alpha/2))$.

397. 90°. Указание. Примените теорему о трех перпендикулярах. **398.** $7(\sqrt{2}-1)a^3/3$. **399.** $R(H-h)/H$, $0<h<H$.

400. $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2\sin^2(\alpha/2)(1+2\cos\alpha)^2}$. **401.** При всех $a\in]-1;\ 1[$, $b\in]-1;\ 1[$.

402. 943/81. Решение. Так как $x_1+x_2=5/3$, $x_1x_2=-1/3$, то

$$(x_1^4+x_2^4)=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2\cdot\frac{1}{9}=$$

$$=\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{9}=\frac{943}{81}.$$

403. $\{1;\ 11\}$. Решение. Рассмотрим два случая: 1) $x\geqslant 0$, 2) $x<0$

1) $x\geqslant 0$. Заданное уравнение запишется

$$3^x+1-(3^x-1)=2\log_5|6-x|\Leftrightarrow 1=\log_5|6-x|\Leftrightarrow|x-6|=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=11.$$

2) $x<0$. Заданное уравнение запишется в виде

$$3^x+1+(3^x-1)=2\log_5(6-x)\Leftrightarrow 3^x=\log_5(6-x).$$

Это уравнение не имеет корней при $x<0$, так как при $x<0$, $3^x<1$, а $\log_5(6-x)>1$.

404. $\{1/10;\ 2;\ 1000\}$.

405. $\{-2\pi/3;\ \pi/2;\ -2\pi(3n\mp 1)/3,\ \pi(6k\pm 1)/3\mid n,\ k\in N\}$. Решение. Рассмотрим 3 случая: 1) $x<0$; 2) $0\leqslant x\leqslant\pi$; 3) $x>\pi$. 1) $x<0$. Уравнение запишется в виде

$$2\pi\cos x=-x-(\pi-x)\Leftrightarrow\cos x=-1/2\Rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}-2\pi n,\ n\in Z.$$

Условию $x<0$ удовлетворяют числа $-2\pi(3n\pm 1)/3$, $n\in N$, и $-2\pi/3$. 2) $0\leqslant x\leqslant\pi$. Уравнение запишется в виде $2\pi\cos x=x-(\pi-x)=2x-\pi$. Графики функций $y=2\pi\cos x$ и $y=2x-\pi$ на отрезке $[0;\ \pi]$ пересекаются только в одной точке с абсциссой $x=\pi/2$. Следовательно, на отрезке $[0;\ \pi]$ уравнение имеет один корень $x=\pi/2$. 3) $x>\pi$. Уравнение запишется в виде

$$2\pi\cos x=x-(x-\pi)=\pi\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Условию $x>\pi$ удовлетворяют числа $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in N$.

406. $\{41\}$. Указание. Запишите $x(1-\lg 5)=x(\lg 10-\lg 5)=x\lg 2=\lg 2^x$.

407. $\{\pi(2k+1)/6,\ 2\pi n\pm\arccos((-1\pm\sqrt{5})/4)\mid k,\ n\in Z\}$. Указание. Проведите следующие преобразования:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=$$
$$=2\cos 3x\cos 2x+2\cos 3x\cos x+\cos 3x=$$
$$=\cos 3x(2\cos 2x+\cos x+1)=\cos 3x(4\cos^2 x+\cos x-1).$$

408. $\{2\}$. **409.** $\{\pi(6k+1)/3\mid k\in Z\}$. Указание. Данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\cos 3x=-1,\\ \cos\left(2x-\dfrac{7\pi}{6}\right)=-1.\end{cases}$$

410. 4.

411. 2. Указание. Постройте график функции $y=x^4+x^3-10$ и найдите количество точек его пересечения с осью Ox.

412. 4. Указание. Постройте графики функций $y=|2-|x||$ и $y=3^{-|x|}$ и найдите число их точек пересечения. **413.** 4. Указание. Постройте графики функций $y=x^2-2x-3$ и $y=\log_2|1-x|$ и найдите число их точек пересечения.

414. $a<-3$. Указание. Чтобы уравнение имело три корня, нужно, чтобы функция $y=x^3+ax+2$ имела минимум и максимум; если x_1 — точка максимума, а x_2 — точка минимума функции, то $x_1>x_2$, $y(x_1)>0$, а $y(x_2)<0$.

415. $0<a<4/e^2$. **416.** $0<a<1/e$. **417.** $\{-\pi;\ 0;\ \pi\}$. **418.** $-24/25$.

419. $]0;\ 3]\cup[4;\ 5]$. Указание. Данное неравенство равносильно системе неравенств $x>0$, $25-x^2\geqslant 0$, $25-x^2\leqslant 144/x^2$.

420. $[-2;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ 2]$. Указание. При всех $x\neq 0$, $|x|\neq 1$ имеем $(1+x^2)/(2|x|)>1$.

421. $]1/4;\ 3[$. **422.** $[-2;\ 2[$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств: 1) $6+x-x^2\geqslant 0$, $4x-2<0$; 2) $6+x-x^2\geqslant 0$, $4x-2\geqslant 0$, $9(6+x-x^2)>(4x-2)^2$.

423. $]-\infty;\ -5[\cup]1;\ +\infty[$.

424. 2. **425.** $2\sin 2$. **426.** На $]-\infty;\ 1/3[$ возрастает, на $]1/3;\ +\infty[$ убывает, $x=1/3$ — точка максимума.

427. Промежутки убывания $]0;\ 1[$ и $]1;\ e[$, $x=e$ — точка минимума, $]e;\ +\infty[$ — промежуток возрастания.

428. Указание. Так как $y'=12x(x^2-x+1)+a$, то нужно доказать, что уравнение $12x(x^2-x+1)+a=0$ имеет только один корень x_1, при этом при переходе x через x_1 производная y' меняет знак. Если $a=0$, то корень один: $x=0$. При $a\neq 0$ значение $x=0$ не является корнем. Представьте уравнение в виде $x^2-x+1=a/(12x)$ и докажите, что графики функций $y=a/(12x)$ и $y=x^2-x+1$ пересекаются в одной точке.

429. $\pm\sqrt{2}$. **430.** $a=0$. **431.** $\pi/2$. **432.** 4,5. **433.** 15. **434.** 1/3. **435.** $\pi^2/2$.

437. $M(0;\ 0;\ 2/3)$, $N(1/3;\ 1/3;\ 2/3)$. Указание. Вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен биссектрисе первого координатного угла плоскости xOy. **438.** $\pi/3$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь собран материал справочного характера.

I. АЛГЕБРА И ТРИГОНОМЕТРИЯ

Натуральные числа ($N=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$). Всякое натуральное число n единственным образом раскладывается в произведение *простых* сомножителей

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ \ldots\ p_m^{k_m},$$

где $p_1, \ldots, p_m$ — простые *делители* числа n, а $k_1, \ldots, k_m$ — *кратности* этих делителей ($k_1, \ldots, k_m \in N$).

Для вычисления *наибольшего общего делителя* двух натуральных чисел нужно каждый их простой общий делитель возвести в степень, равную меньшей из кратностей, с которыми этот делитель входит в разложение данных чисел на простые множители, и все полученные числа перемножить.

Для вычисления *наименьшего общего кратного* двух натуральных чисел нужно каждый простой делитель, входящий в разложение хотя бы одного из этих чисел, возвести в степень, равную большей из кратностей, с которыми этот делитель входит в разложение данных чисел на простые множители, и все полученные числа перемножить.

Если a_0 — цифры в разряде единиц, a_1 — цифра в разряде десятков и т. д. натурального числа n, то это число записывается в виде

$$n=\overline{a_ka_{k-1}\ \ldots\ a_1a_0}=a_k\cdot 10^k+\ldots+a_1\cdot 10+a_0.$$

Признаки делимости. Число n делится:

1) на 2 (на 5) тогда и только тогда, когда a_0 делится на 2 (на 5);

2) на 4 тогда и только тогда, когда число $a_1\cdot 10+a_0$ делится на 4;

3) на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма всех цифр этого числа делится на 3 (на 9).

Рациональные числа (Q). Всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ ($p\in Z$ — целое число, $q\in N$ — натуральное число) представимо в виде *бесконечной периодической десятичной дроби* (возможно с нулевым периодом)

$$\frac{p}{q}=\pm\, a,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m).$$

Справедливо и обратное представление:

$$\pm a,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) = \pm a \pm 0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) =$$

$$= \pm a \pm \frac{\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m} - \overline{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{n}}.$$

Действительные числа (Q). Числа, представимые всевозможными десятичными дробями, называются *действительными* числами.

Формулы сокращенного умножения. Для любых чисел $a,\ b \in Q$ справедливы равенства

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+3b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-3b^3;$$
$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Справедливы также общие формулы того же типа:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n$$

— формула *бинома Ньютона*;

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+a^{n-k}b^k+\ldots+b^{n-1});$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

Свойства биномиальных коэффициентов C_n^k.

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n,\quad 0! = 1 \text{ (по определению)}.$$

В частности,

$$0!=1,\ 1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,$$
$$4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720 \text{ и т. д.}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

В частности,

$$C_5^0=1,\ C_5^1=5,\ C_5^2=10,\ C_5^3=10,\ C_5^4=5,\ C_5^5=1.$$

Справедливы следующие равенства ($0 \leqslant k \leqslant n$):

$$C_n^k = C_n^{n-k},\quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1};$$
$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Модуль действительного числа.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,\quad ||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

Арифметический корень. Неотрицательное число b, такое, что $b^n=a$ ($n \geqslant 2$ натуральное), называется *арифметическим корнем n-й степени* из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. В частности, $\sqrt{c^2}=|c|$.

Корень n-й степени. Число b называется *корнем n-й степени* из числа a, если $b^n=a$.

Например, числа 2 и —2—корни четвертой степени из числа 16; число —3—корень кубический из числа —27. В то же время арифметический корень четвертой степени из числа 16 только один, а именно, число 2. Арифметического корня третьей степени из числа —27 не существует.

Квадратное уравнение. Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0) \tag{*}$$

называется *квадратным уравнением*. Величина $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения. Тогда:

1) если $D \geqslant 0$, то уравнение имеет *два действительных корня*

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

(при $D=0$ корни совпадают);

2) если $D<0$, то уравнение *действительных корней не имеет*. Справедливы следующие утверждения:

а) если x_1 и x_2—корни квадратного уравнения (*), то: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ (*теорема Виета*);

б) $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$—*формула разложения квадратного трехчлена на множители.*

Решение квадратичных неравенств

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (a \neq 0). \tag{**}$$

1) Если $D>0$, то уравнение (*) имеет два различных действительных корня $x_1<x_2$. Тогда

$$a>0 \Rightarrow x \in]-\infty;\ x_1 [\cup]\ x_2;\ +\infty[;$$
$$a<0 \Rightarrow x \in]\ x_1;\ x_2 [.$$

2) Если $D=0$, то уравнение (*) имеет два равных действительных корня $x_1=x_2$. В этом случае

$$a>0 \Rightarrow x \in]-\infty;\ x_1 [\cup]\ x_1;\ +\infty[;$$
$$a<0 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

3) Если $D<0$, то уравнение (*) корней не имеет. В этом случае

$$a>0 \Rightarrow x \in]-\infty,\ +\infty[;$$
$$a<0 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

Аналогично решается неравенство $ax^2+bx+c \geqslant 0$.

Теорема Безу. Если число c является корнем многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

то этот многочлен делится на $(x-c)$ без остатка.

Свойства степени. Пусть $a>0$, $b>0$, α, $\beta\in R$. Тогда:

1) $a^0=1$ (по определению);
2) $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;
3) $a^\alpha:a^\beta=a^{\alpha-\beta}$;
4) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\cdot\beta}$;
5) $a^\alpha\cdot b^\alpha=(a\cdot b)^\alpha$;
6) $a^\alpha:b^\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$.

Свойства логарифмов. *Логарифмом* положительного числа x по основанию $a\,(a>0,\ a\neq 1)$ называется число, равное показателю степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x.

Обозначения: $\log_a x$; $\log_{10} x\equiv\lg x$, $\log_e x\equiv\ln x$. По определению $a^{\log_a x}=x$.

1) $\log_a x_1\cdot x_2=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\quad x_1\cdot x_2>0$;
2) $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|,\quad x_1\cdot x_2>0$;
3) $\log_a x^p=p\log_a x,\quad x>0$;
$\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|,\quad n\in\boldsymbol{N},\ x\neq 0$;
4) $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}\quad x>0,\ -b>0,\ b\neq 1.$

Решение простейших показательных и логарифмических уравнений.

$a^x=b\ (a>0,\ a\neq 1)$

1) $b\leqslant 0\Rightarrow x\in\varnothing$,
2) $b>0\Rightarrow x=\log_a b$.

$\log_a x=b$

$x=a^b$.

Решение простейших показательных и логарифмических неравенств.

$a^x<b\ (a>0,\ a\neq 1)$

1) $b\leqslant 0\Rightarrow x\in\varnothing$,
2) $b>0,\ a>1\Rightarrow x<\log_a b$,
$b>0,\ 0<a<1\Rightarrow x>\log_a b$.

$\log_a x<b$

1) $a>1\Rightarrow 0<x<a^b$,
2) $0<a<1\Rightarrow x>a^b$.

Аналогично решаются неравенства со знаками $\geqslant$, $>$, $\leqslant$.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

$\sin x=a$

1) $|a|>1\Rightarrow x\in\varnothing$,
2) $|a|\leqslant 1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=(-1)^m\arcsin a+\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$.

$\cos x=a$

1) $|a|>1\Rightarrow x\in\varnothing$,
2) $|a|\leqslant 1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\pm\arccos+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

$\operatorname{tg} x=a$

$x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

$\operatorname{ctg} x=a$

$x=\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Основные тригонометрические формулы.

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
2) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.
3) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.
4) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.
5) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.
6) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

7) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

8) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

9) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

10) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

11) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

12) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

13) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

14) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

15) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$.

16) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$.

17) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

(см. также формулы на стр. 89—91).

Формулы приведения ($n \in Z$).

1) $\sin(\pi n + \alpha) = (-1)^n \sin\alpha$, $\sin(\pi n - \alpha) = (-1)^{n+1}\sin\alpha$.

2) $\cos(\pi n \pm \alpha) = (-1)^n \cos\alpha$.

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n \pm \alpha\right) = (-1)^n \cos\alpha$.

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \alpha\right) = (-1)^{n+1}\sin\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - \alpha\right) = (-1)^n \sin\alpha$.

Обратные тригонометрические функции. *Арксинус* числа $x \in [-1, +1]$ (обозначается $\arcsin x$) — такое число $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x.

Арккосинус числа $x \in [-1, 1]$ (обозначается $\arccos x$) — такое число $y \in [0, \pi]$, косинус которого равен x.

Арктангенс числа $x \in R$ (обозначается $\operatorname{arctg} x$) — такое число $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, тангенс которого равен x.

Основные тождества:

1) $\sin(\arcsin x) = x$, $\quad x \in [-1; +1]$;

$\arcsin(\sin x) = x$, $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\cos(\arccos x) = x$, $\quad x \in [-1; +1]$;

$\arccos(\cos x) = x$, $\quad x \in [0, \pi]$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\quad x \in R$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

4) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\quad x \in [-1, +1]$.

Таблица значений тригонометрнческих функций

$\alpha°$	α (радианы)	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\cos\alpha$		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,999	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,326	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\sin\alpha$	α (радианы)	$\alpha°$

Комплексные числа.

$$z=a+bi, \qquad i^2=-1, \qquad a,\ b\in R;$$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ — *модуль* числа z.

Величина угла $\varphi\in]-\pi,\ \pi]$, удовлетворяющего системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}, \\ \sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}, \end{cases}$$

называется *главным аргументом* числа z, а $\varphi+2\pi n$ $(n\in Z)$ — аргументами числа z.

$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — *тригонометрическая форма записи комплексного числа.*

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i;$$
$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;$$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{1}{a_2^2+b_2^2}(a_1+b_1i)(a_2-b_2i).$$

Число $\bar z=a-bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z=a+bi$.

$$z\cdot\bar z=|z|^2=a^2+b^2.$$

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$
$$z_1:z_2=r_1/r_2[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Формула Муавра.

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Решение квадратных уравнений

$$ax^2+bx+c=0.$$

Если $D\geqslant 0$, то корни действительные

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D<0$, то корни — комплексные числа, вычисляемые по формулам

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Справедливо утверждение (*теорема Гаусса*): любой многочлен степени n имеет ровно n корней (с учетом их кратностей).

II. НАЧАЛА АНАЛИЗА

Последовательности. Если имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторое действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

В частности, если для всех $n \in N$ $a_{n+1}=a_n+d$, где d—фиксированное число, то такая последовательность называется *арифметической прогрессией*. Если же $a_{n+1}=a_n \cdot q$, где q—также фиксировано, то последовательность называется *геометрической прогрессией* (см. стр. 119).

Число a называется *пределом* последовательности (a_n), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число N (зависящее от числа ε), такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ справедливо неравенство $|a_n-a| < \varepsilon$.

Обозначение: $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ (при $|q| < 1$),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad \text{(определение числа } e\text{)}.$$

Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $D(f) \subseteq R$, и пусть точка a такова, что в любой ее окрестности лежит бесконечно много точек множества $D(f)$ (точка *сгущения* или *предельная* точка множества $D(f)$).

Число b называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое (зависящее от ε) число $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$ и удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x)-b| < \varepsilon.$$

Обозначение: $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $a \in D(f)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Функция *непрерывна на множестве* $X \subseteq D(f)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Сумма, разность и произведение двух непрерывных на одном и том же множестве функций также непрерывны на этом множестве. Если знаменатель дроби не обращается в нуль на множестве, то и частное двух непрерывных на этом множестве функций также непрерывно. В частности, многочлен непрерывен на всей числовой оси, а дробно рациональная функция непрерывна во всех точках оси, где знаменатель отличен от нуля.

Определение производной.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Правила дифференцирования.

1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.

2) $(Cf(x))'=Cf'(x)$ (C — постоянная).

3) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

4) $(f(x)/g(x))'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Производные некоторых функций.

1. $(C')=0$.
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha\in R)$.
3. $(\sin x')=\cos x$.
4. $(\cos x)'=-\sin x$.
5. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(a^x)'=a^x\ln a$,

   $(e^x)'=e^x$.
8. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$,

   $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
12. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Геометрический смысл производной. $f'(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x;\ f(x))$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Если $f'(x)>0$ (<0) на интервале $]a;\ b[$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Точка $x_0\in D(f)$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если для всех $x\in D(f)$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$. Точки максимума и минимума называются точками *экстремума* функции.

Критическая точка функции — точка из области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует.

Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Достаточное условие экстремума. Если при переходе через критическую точку x_0 производная функции меняет знак с «+» на «—», то x_0 — точка максимума; если производная меняет знак с «—» на «+», то x_0 — точка минимума этой функции; если производная не меняет знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для $f(x)$ на промежутке, если $F'(x)=f(x)$ на этом промежутке. Все первообразные функции $f(x)$ запишутся в виде $F(x)+C$, где C — всевозможные постоянные.

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, то $F(x)+G(x)$, $\alpha F(x)$, $\dfrac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразные функций $f(x)+g(x)$, $\alpha f(x)$, $f(kx+b)$

соответственно. Первообразные некоторых элементарных функций легко получить из таблицы производных, приведенной выше.

Интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$) — предел интегральных сумм $f(c_1)\,\Delta x_1+f(c_2)\,\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\,\Delta x_n$ при условии, что длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ стремится к нулю. Здесь $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $c_k\in[x_{k-1}; x_k]$.

Формула Ньютона—Лейбница. Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком неотрицательной функции $f(x)$, равна

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, равен

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Векторы. *Вектором* называется направленный отрезок. *Длиной вектора* называется длина этого отрезка. Векторы называются *равными*, если их длины равны и они сонаправлены.

Обозначения вектора: $\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}$ (если A — начало, а B — конец вектора); $|\boldsymbol{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ — обозначение длины вектора. Если $|\boldsymbol{a}|=0$, то $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор.

Для любой пары векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определены их *сумма* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и *разность* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ можно *умножить* на любое число $k\in\boldsymbol{R}$.

Ненулевые векторы называют *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору; любые три вектора, среди которых есть нулевой, считаются компланарными.

Если $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ — три некомпланарных вектора, то любой вектор $\boldsymbol{a}$ представим в виде $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{p}+y\boldsymbol{q}+z\boldsymbol{r}$. [Это представление называется *разложением* вектора $\boldsymbol{a}$ по *базису* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$; числа x, y, z называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$. Запись: $\boldsymbol{a}=\{x;\ y;\ z\}$.

Если в данном базисе $\boldsymbol{a}_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то в том же базисе $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$, $k\boldsymbol{a}_1=\{kx_1;\ kx_2;\ kx_3\}$.

Отложим от произвольной точки O векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$. *Углом* между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется угол между лучами OA и OB. Обозначение $(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\equiv(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}).$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение считается равным нулю по определению. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — базис из ортогональных векторов, по длине равных единице (координатные векторы), и в этом базисе $\boldsymbol{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2};\qquad \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Справочный материал по геометрии см. в разделе III данного пособия.

СПИСОК ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СТРАНЫ (С УКАЗАНИЕМ СОКРАЩЕННЫХ НАЗВАНИЙ, ПРИНЯТЫХ В ДАННОМ СБОРНИКЕ), МАТЕРИАЛЫ КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАНЫ В СБОРНИКЕ ЗАДАЧ

АзГПИ — Азербайджанский ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт им. В. И. Ленина.

АзГУ — Азербайджанский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. С. М. Кирова.

АзПИ — Азербайджанский политехнический институт им. Ч. Ильдрыма.

АрГПИ — Архангельский государственный педагогический институт им. М. В. Ломоносова.

БарГПИ — Барнаульский государственный педагогический институт.

БашГУ — Башкирский государственный университет им. 40-летия Октября.

БГПИ — Благовещенский государственный педагогический институт им. М. И. Калинина.

БГУ — Белорусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В. И. Ленина.

БорПИ — Борисоглебский педагогический институт.

ВГУ — Воронежский ордена Ленина государственный университет им. Ленинского комсомола.

ВЗИИЖТ — Всесоюзный заочный институт инженеров железнодорожного транспорта.

ВЗИТиЛП — Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности.

ВЗПИ — Всесоюзный заочный политехнический институт.

ВЗФЭИ — Всесоюзный заочный финансово-экономический институт.

ВЗЭИС — Всесоюзный заочный электротехническй институт связи.

ВильнГУ — Вильнюсский ордена Трудового Красного Знамени и ордена Дружбы Народов государственный университет им. В. Капсунаса.

ВЛТИ — Воронежский ордена Дружбы Народов лесотехнический институт.

ВолгПИ — Волгоградский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт.

ВТИЛП — Витебский технологический институт легкой промышленности.

ВТУЗ ЗИЛ — Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева.

ГГУ — Горьковский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н. И. Лобачевского.

ГомГУ — Гомельский государственный университет.

ДГУ — Дальневосточный государственный университет.

ДнепрГУ — Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. 300-летия воссоединения Украины с Россией.

ДонГУ — Донецкий государственный университет.

ЕГУ — Ереванский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет.

КазанАИ — Казанский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. А. Н. Туполева.

КазанГУ — Казанский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В. И. Ульянова — Ленина.

КГУ — Киевский ордена Ленина государственный университет им. Т. Г. Шевченко.

КиевГПИ — Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького.

КирГПИ — Кировский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина.

КИСИ — Киевский инженерно-строительный институт.

КИЦМ — Красноярский ордена Трудового Красного Знамени институт цветных металлов им. М. И. Калинина.

КишГУ — Кишиневский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В. И. Ленина.

КишПИ — Кишиневский политехнический институт им. С. Г. Лазо.

КолПИ — Коломенский педагогический институт.

КПИ — Киевский ордена Ленина политехнический институт им. 50-летия Великой Октябрьской социалистической революции.

КрГУ — Красноярский государственный университет.

КубГУ — Кубанский государственный университет.

КуйбГУ — Куйбышевский государственный университет.

ЛатвГУ — Латвийский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет.

ЛГПИ — Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт им. А. И. Герцена.

ЛГУ — Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. А. Жданова.

ЛПИ — Ленинградский ордена Ленина политехнический институт им. М. И. Калинина.

ЛФЭИ — Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского.

ЛьвГУ — Львовский ордена Ленина государственный университет им. Ивана Франко.

МАДИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени автомобильно-дорожный институт.

МАИ — Московский ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции авиационный институт им. Серго Орджоникидзе.

МАМИ — Московский автомеханический институт.

МарПИ — Марийский политехнический институт им. А. М. Горького.

МАРХИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени архитектурный институт.

МАТИ — Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского.

МВИМУ — Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола.

МВМИ — Московский вечерний металлургический институт.

МВТУ — Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана.

МГИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени горный институт.

МГМИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени гидромелиоративный институт.

МГПИ — Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт им. В. И. Ленина.

МГРИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе.

МГУ — Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. М. В. Ломоносова.

МИИВТ — Московский институт инженеров водного транспорта.

МИИГАиК — Московский ордена Ленина институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

МИИЖТ — Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институт инженеров железнодорожного транспорта.

МИИЗ — Московский институт инженеров землеустройства.

МИНГП — Московский ордена Трудового Красного Знамени институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина.

МИНХ — Московский ордена Трудового Красного Знамени институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова.

МИРЭА — Московский институт радиотехники, электроники и автоматики.

МИСИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева.

МИСиС — Московский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институт стали и сплавов.

МИТХТ — Московский ордена Трудового Красного Знамени институт тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова.

МИУ — Московский ордена Трудового Красного Знамени институт управления им. Серго Орджоникидзе.

МИФИ — Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физический институт.

МИХМ — Московский ордена Трудового Красного Знамени институт химического машиностроения.

МИЭМ — Московский институт электронного машиностроения.

МИЭТ — Московский институт электронной техники.

ММИ — 2-й Московский ордена Ленина государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова.

МОПИ — Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской.

МордГУ — Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева.

МПИ — Московский полиграфический институт.

МСИ—Московский ордена Трудового Красного Знамени станко-инструментальный институт.

МТИ—Московский ордена Трудового Красного Знамени текстильный институт им. А. Н. Косыгина.

МТИЛП—Московский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт легкой промышленности.

МТИМБО—Московский технологический институт Министерства бытового обслуживания населения РСФСР.

МТИММП—Московский технологический институт мясной и молочной промышленности.

МТИПП—Московский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт пищевой промышленности.

МФИ—Московский финансовый институт.

МФТИ—Московский ордена Трудового Красного Знамени физико-технический институт.

МХТИ—Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени химико-технологический институт им. Д. И. Менделеева.

МЭИ—Московский ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетический институт.

МЭИС—Московский ордена Трудового Красного Знамени электротехнический институт связи.

МЭСИ—Московский экономико-статистический институт.

НГУ—Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола.

НЭТИ—Новосибирский электротехнический институт.

ОГПИ—Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского.

ОГУ—Одесский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. И. И. Мечникова.

ОмГУ—Омский государственный университет.

ОПИ—Одесский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт.

ПГУ—Пермский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. М. Горького.

РГУ—Ростовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет.

РИИГА—Рижский Краснознаменный институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола.

РПИ—Рижский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт.

САДИ—Сибирский ордена Трудового Красного Знамени автомобильно-дорожный институт.

СГУ—Саратовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

СимфГУ—Симферопольский государственный университет.

ТаджГУ—Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина.

ТартГУ—Тартусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет.

ТашГПИ — Ташкентский государственный педагогический институт им. Низами.

ТашГУ — Ташкентский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В. И. Ленина.

ТашПИ — Ташкентский ордена Дружбы Народов политехнический институт им. Бируни.

ТбГУ — Тбилисский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет.

ТГУ — Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В. В. Куйбышева.

ТИАСУиР — Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники.

ТРТИ — Таганрогский радиотехнический институт им. В. Д. Калмыкова.

УжГУ — Ужгородский государственный университет.

УПИ — Уральский политехнический институт.

УрГУ — Уральский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. М. Горького.

УЭИИЖТ — Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта.

ХАИ — Харьковский ордена Ленина авиационный институт им. Н. Е. Жуковского.

ХАИРЭ — Харьковский институт радиоэлектроники.

ХГУ — Харьковский ордена Трудового Красного Знамени и ордена Дружбы Народов государственный университет им. А. М. Горького.

ЯГУ — Ярославский государственный университет.

ЯПИ — Ярославский политехнический институт.

Валерий Михайлович Говоров
Петр Тимофеевич Дыбов
Николай Васильевич Мирошин
Серафима Федоровна Смирнова

СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ
(с методическими указаниями и решениями)

Редактор *А. Ф. Лапко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *М. Л. Медведская*

ИБ № 11933

Сдано в набор 06.04.83. Подписано к печати 02.08.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 30,41. Тираж 400 000 экз. (1-й завод 1—200 000 экз.). Заказ № 1577. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

НЕКОТОРЫЕ ИЗ ОПЕЧАТОК

Страницы	Строка	Напечатано	Следует читать
369	4 св.	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$
369	6 св.	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$
371	4 св.	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
371	12 св.	$x_1 \cdot x_2$	$(x_1 \cdot x_2)$
371	16 св.	$-b>0$	$b>0$
371	10 сн.	arccos	arccos a
371	1 сн.	α , β,	,α , β,
372	11 св.	$-\cos(\alpha+\beta)$	$+\cos(\alpha+\beta)$
372	10 и 9 сн.	$\ni$	$\in$
373	11 св.	0,999	0,990
374	11 сн.	r_1/r_2	(r_1/r_2)
378	2 св.	$kx_2;\ kx_3\}$	$ky_1;\ kz_1\}$

1р.20к.